

∞ Baccaauréat S Amérique du Nord 31 mai 2012 ∞

**EXERCICE 1**

**5 points**

Dans une association sportive, un quart des femmes et un tiers des hommes adhère à la section tennis. On sait également que 30 % des membres de cette association adhèrent à la section tennis.

**PARTIE A.**

On choisit au hasard un membre de cette association et on note :

- F l'événement « le membre choisi est une femme »,
- T l'événement « le membre choisi adhère à la section tennis ».

1. Montrer que la probabilité de l'événement F est égale à  $\frac{2}{5}$ .
2. On choisit un membre parmi les adhérents à la section tennis.  
Quelle est la probabilité que ce membre soit une femme ?

**PARTIE B.**

Pour financer une sortie, les membres de cette association organisent une loterie.

1. Chaque semaine, un membre de l'association est choisi au hasard de manière indépendante pour tenir la loterie.
  - a. Déterminer la probabilité pour qu'en quatre semaines consécutives, il y ait exactement deux fois un membre qui adhère à la section tennis parmi les membres choisis.
  - b. Pour tout entier naturel  $n$  non nul, on note  $p_n$  la probabilité pour qu'en  $n$  semaines consécutives, il y ait au moins un membre qui adhère à la section tennis parmi les membres choisis.  
Montrer que pour tout entier  $n$  non nul,  $p_n = 1 - \left(\frac{7}{10}\right)^n$ .
  - c. Déterminer le nombre minimal de semaines pour que  $p_n \geq 0,99$ .

2. Pour cette loterie, on utilise une urne contenant 100 jetons ; 10 jetons exactement sont gagnants et rapportent 20 euros chacun, les autres ne rapportent rien.  
Pour jouer à cette loterie, un joueur doit payer 5 € puis tire au hasard et de façon simultanée deux jetons de l'urne : il reçoit alors 20 euros par jeton gagnant. Les deux jetons sont ensuite remis dans l'urne.

On note X la variable aléatoire associant le gain algébrique (déduction faite des 5 €) réalisé par un joueur lors d'une partie de cette loterie.

- a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.
- b. Calculer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X et interpréter le résultat obtenu.

## EXERCICE 2

5 points

**PARTIE A. Restitution organisée des connaissances**

On rappelle que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$ .

Démontrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ .

**PARTIE B.**

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[1; +\infty[$  par  $f(x) = x - \frac{\ln(x)}{x}$ .

On note  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère orthonormal  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1. Soit  $g$  la fonction définie sur  $[1; +\infty[$  par  $g(x) = x^2 - 1 + \ln(x)$ .  
Montrer que la fonction  $g$  est positive sur  $[1; +\infty[$ .
2.
  - a. Montrer que, pour tout  $x$  de  $[1; +\infty[$ ,  $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2}$ .
  - b. En déduire le sens de variation de  $f$  sur  $[1; +\infty[$ .
  - c. Montrer que la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $y = x$  est une asymptote à la courbe  $\mathcal{C}$ .
  - d. Étudier la position de la courbe  $\mathcal{C}$  par rapport à la droite  $\mathcal{D}$ .
3. Pour tout entier naturel  $k$  supérieur ou égal à 2, on note respectivement  $M_k$  et  $N_k$  les points d'abscisse  $k$  de  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{D}$ .
  - a. Montrer que, pour tout entier naturel  $k$  supérieur ou égal à 2, la distance  $M_k N_k$  entre les points  $M_k$  et  $N_k$  est donnée par  $M_k N_k = \frac{\ln(k)}{k}$ .
  - b. Écrire un algorithme déterminant le plus petit entier  $k_0$  supérieur ou égal à 2 tel que la distance  $M_k N_k$  soit inférieur ou égale à  $10^{-2}$ .

## EXERCICE 3

5 points

Soit  $f$  une fonction définie et dérivable sur  $[0; 1]$  telle que :

$$f(0) = 0 \text{ et } f'(x) = \frac{1}{1+x^2} \text{ pour tout } x \text{ de } [0; 1].$$

On ne cherchera pas à déterminer  $f$ .

**PARTIE A.**

1. Déterminer le sens de variation de  $f$  sur  $[0; 1]$ .
2. Soit  $g$  la fonction définie sur  $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$  par  $g(x) = f(\tan(x))$ .
  - a. Justifier que  $g$  est dérivable sur  $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ , puis que, pour tout  $x$  de  $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ ,  $g'(x) = 1$ .
  - b. Montrer que, pour tout  $x$  de  $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ ,  $g(x) = x$ , en déduire que  $f(1) = \frac{\pi}{4}$ .

3. Montrer que, pour tout  $x$  de  $[0; 1]$ ,  $0 \leq f(x) \leq \frac{\pi}{4}$ .

**PARTIE B.**

Soit  $(I_n)$  la suite définie par  $I_0 = \int_0^1 f(x) dx$  et, pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $I_n = \int_0^1 x^n f(x) dx$ .

1. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que,  $I_0 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln(2)$ .
2.
  - a. Montrer que, pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $I_n \geq 0$ .
  - b. Montrer que, pour tout entier naturel non nul  $n$ ,  $I_n \leq \frac{\pi}{4(n+1)}$ .
  - c. En déduire la limite de la suite  $(I_n)$ .

**EXERCICE 4****5 points**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

On considère l'application  $f$  du plan dans lui-même qui, à tout point  $M$  d'affixe  $z$ , associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  telle que :  $z' = z^2$ .

On note  $\Omega$  le point d'affixe 1.

1. Déterminer l'ensemble  $\Gamma_1$  des points  $M$  du plan tels que  $f(M) = M$ .
2. Soit  $A$  le point d'affixe  $a = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$ .
  - a. Exprimer  $a$  sous forme exponentielle.
  - b. En déduire les affixes des deux antécédents de  $A$  par  $f$ .
3. Déterminer l'ensemble  $\Gamma_2$  des points  $M$  d'affixe  $z$  tels que l'affixe  $z'$  du point  $M'$  soit un nombre imaginaire pur.
4. Dans cette question, on souhaite déterminer l'ensemble  $\Gamma_3$  des points  $M$  distincts de  $\Omega$  pour lesquels le triangle  $\Omega MM'$  est rectangle isocèle direct en  $\Omega$ .
  - a. À l'aide de la rotation de centre  $\Omega$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ , montrer que  $M$  est un point de  $\Gamma_3$  si et seulement si  $z^2 - iz - 1 + i = 0$  et  $z \neq 1$ .
  - b. Montrer que  $z^2 - iz - 1 + i = (z-1)(z+1-i)$ .
  - c. En déduire l'ensemble  $\Gamma_3$ .
5. Soit  $M$  un point d'affixe  $z$  différente de 0 et e 1.
  - a. Exprimer  $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'})$  en fonction d'un argument de  $z$ .
  - b. En déduire l'ensemble  $\Gamma_4$  des points  $M$  distincts de  $O$  et de  $\Omega$  tels que  $O, M$  et  $M'$  soient alignés.

**EXERCICE 5 Spécialité****5 points**

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

Soit  $S$  la transformation du plan qui, à tout  $M$  d'affixe  $z$ , associe le point  $M'$  d'affixe  $z'$  telle que :  
 $z' = 5iz + 6i + 4$ .

**PARTIE A.**

1. Déterminer la nature et les éléments caractéristique de la transformation  $S$ .
2. On note  $x$  et  $x'$ ,  $y$  et  $y'$  les parties réelles et imaginaires respectives de  $z$  et  $z'$ .

Démontrer que :

$$\begin{cases} x' &= -5y + 4 \\ y' &= 5x + 6 \end{cases}$$

**PARTIE B.**

Dans cette partie, on se place dans le cas où les coordonnées  $x$  et  $y$  du point  $M$  sont des entiers relatifs tels que  $-3 \leq x \leq 5$  et  $-3 \leq y \leq 5$ .

On note  $\mathcal{E}$  l'ensemble de ces points  $M$ .

On rappelle que les coordonnées  $(x'; y')$  du point  $M'$ , image du point  $M$  par la transformation  $S$ , sont  $x' = -5y + 4$  et  $y' = 5x + 6$ .

1.
  - a. Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs  $(a; b)$  tels que  $4a + 3b = 5$ .
  - b. En déduire l'ensemble des points  $M$  de  $\mathcal{E}$  de coordonnées  $(x; y)$  tels que  $-3x' + 4y' = 37$ .
2. Soit  $M$  un point de l'ensemble  $\mathcal{E}$  et  $M'$  son image par la transformation  $S$ .
  - a. Démontrer que  $x' + y'$  est un multiple de 5.
  - b. Démontrer que  $x' - y'$  et  $x' + y'$  sont congrus modulo 2.  
En déduire que si  $x'^2 - y'^2$  est multiple de 2 alors  $x' - y'$  et  $x' + y'$  le sont également.
  - c. Déterminer l'ensemble des points  $M$  de  $\mathcal{E}$  tels que :  $x'^2 - y'^2 = 20$ .