Antilles-Guyane septembre 2011

EXERCICE 1 5 points Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie $]0\,;+\infty[$ par : $f(x) = x\ln x - 1$.

Partie A : Étude d'une fonction

1. *a.* Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.

b. Déterminer la limite de la fonction f en 0.

2. Soit f' la fonction dérivée de la fonction f .Calculer $f'(x)$ pour tout réel x de $]0\,;+\infty[$.

En déduire le tableau de variations de la fonction f sur $]0\,;+\infty[$.

3. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $]0\,;+\infty[$. On note α cette solution. Déterminer un encadrement de α à la précision 10^{-2}.

4. Déterminer le signe de $f(x)$ lorsque x appartient à $]0\,;+\infty[$.

5. Montrer que $\ln\alpha = \dfrac{1}{\alpha}$.

Partie B : Calcul d'une intégrale

On donne en annexe la courbe C , représentation graphique de la fonction f dans un repère orthonormé. On considère l'intégrale suivante : $I = \displaystyle\int_\alpha^4 f(x)\,\mathrm{d}x$.

1. Justifier que l'intégrale I est l'aire d'une partie du plan que l'on hachurera sur le graphique donné en annexe (à rendre avec la copie).

2. À l'aide d'une intégration par parties, calculer l'intégrale $J = \displaystyle\int_\alpha^4 x\ln x\,\mathrm{d}x$.

3. Montrer l'égalité : $I = \dfrac{\alpha^2}{4} + \dfrac{\alpha}{2} + 16\ln 2 - 8$.

En déduire une valeur approchée de I à 10^{-1} près.

EXERCICE 2 5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère les trois points A, B et C de coordonnées respectives : A $(-1\,;2\,;1)$, B $(1\,;-6\,;-1)$ et C $(2\,;2\,;2)$.

1. *a.* Vérifier que les points A, B et C définissent bien un plan.

b. Montrer que le vecteur $\vec{n}$ $(1\,;1\,;-3)$ est un vecteur normal au plan (ABC).

c. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).

2. Soit P le plan d'équation : $x - y + z - 4 = 0$.

a. Montrer que les plans (ABC) et P sont sécants.

b. Soit D la droite intersection des plans P et (ABC). Déterminer une représentation paramétrique de la droite D.

3. On considère la sphère S de centre $\Omega(3\,;1\,;3)$ et de rayon 3 et on nomme I le point de coordonnées $(2\,;-1\,;1)$. On admet que la droite D a pour représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -3 + 2t \quad t \in \mathbb{R}. \\ z = t \end{cases}$

a. Montrer que le point I appartient à la droite D.

b. Montrer que le point I appartient à la sphère S.

c. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Montrer que la droite D coupe la sphère S en un deuxième point.

EXERCICE 2 5 points Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

L'espace est muni d'un repère orthonormé $(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$.

On considère l'ensemble P des points $M(x\,;y\,;z)$ de l'espace tels que : $z = x^2 + y^2$.

Les trois questions sont indépendantes.

1. *a.* Montrer que l'intersection de l'ensemble P et du plan d'équation $z = 5$ est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

b. Déterminer la nature de l'intersection de l'ensemble P et du plan d'équation $y = 1$.

2. On considère la sphère S de centre O et de rayon $\sqrt{6}$.

a. Donner une équation de la sphère S.

b. Montrer que l'intersection de la sphère S et de l'ensemble P est un cercle.

3. Le but de cette question est de déterminer les points $M(x\,;y\,;z)$ de l'ensemble P, dont les coordonnées sont des entiers relatifs, appartenant au plan d'équation $-3x + 2y = 1$ et vérifiant $z \leq 25$.

a. Donner un couple d'entiers relatifs solution de l'équation (E) : $-3x + 2y = 1$.

b. Déterminer l'ensemble des couples $(x\,;y)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation (E). Déterminer les points de l'ensemble P dont les coordonnées $(x\,;y\,;z)$ sont des entiers relatifs vérifiant : $-3x + 2y = 1$ et $z \leq 25$.

EXERCICE 3 5 points Commun à tous les candidats

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 4 cm.

Partie A :

On note P le point d'affixe $p = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$, Q le point d'affixe $q = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$, et K le point d'affixe -1.

1. *a.* Montrer que les points P et Q appartiennent au cercle Γ de centre O et de rayon 1.

b. Faire une figure et construire les points P et Q.

2. *a.* Déterminer l'ensemble D des points M d'affixe z tels que $|z| = |z+1|$. Représenter cet ensemble sur la figure.

b. Montrer que P et Q sont les points d'intersection de l'ensemble D et du cercle Γ.

Partie B :

On considère trois nombres complexes non nuls a, b et c. On note A, B et C les points d'affixes respectives a, b et c.

On suppose que l'origine O du repère $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ est à la fois le centre de gravité et le centre du cercle circonscrit du triangle ABC.

1. *a.* Montrer que $|a| = |b| = |c|$. En déduire que $\left|\frac{b}{a}\right| = \left|\frac{c}{a}\right| = 1$.

b. Montrer que $a + b + c = 0$.

c. Montrer que $\left|\frac{b}{a}\right| = \left|\frac{b}{a} + 1\right| = 1$.

d. En utilisant la partie A, en déduire que $\frac{b}{a} = p$ ou $\frac{b}{a} = q$.

2. Dans cette question, on admet que $\frac{b}{a} = p$ et $\frac{c}{a} = q$.

a. Montrer que $\frac{q-1}{p-1} = e^{i\frac{\pi}{3}}$.

b. Montrer que $\frac{q-1}{p-1} = \frac{c-a}{b-a}$.

c. Déduire des deux questions précédentes la nature du triangle ABC.

EXERCICE 4 5 points Commun à tous les candidats

Les parties A et B sont indépendantes

Un site internet propose des jeux en ligne.

Partie A :

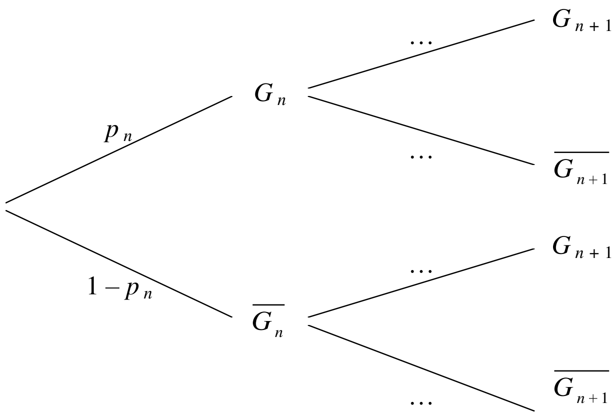
Pour un premier jeu :

- si l'internaute gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la partie suivante est égale à $\frac{2}{5}$.
- si l'internaute perd une partie, la probabilité qu'il perde la partie suivante est égale à $\frac{4}{5}$.

Pour tout entier naturel non nul n, on désigne par G_n l'évènement « l'internaute gagne la n-ième partie » et on note p_n la probabilité de l'évènement G_n.

L'internaute gagne toujours la première partie et donc $p_1 = 1$.

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant :



2. Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, $p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{1}{5}$.

3. Pour tout n entier naturel non nul, on pose $u_n = p_n - \frac{1}{4}$.

a. Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de premier terme u_1 à préciser.

b. Montrer que, pour tout n entier naturel non nul, $p_n = \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{4}$.

c. Déterminer la limite de p_n.

Partie B :

Dans un second jeu, le joueur doit effectuer 10 parties.

On suppose que toutes les parties sont indépendantes.

La probabilité de gagner chaque partie est égale à $\frac{1}{4}$.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées par le joueur.

1. ***a.*** Quelle est la loi de probabilité suivie par la variable aléatoire X ? Justifier.

b. Quelle est la probabilité que le joueur gagne au moins une partie ? Le résultat sera arrondi à 10^{-2} près.

c. Déterminer l'espérance de X.

2. Le joueur doit payer 30 € pour jouer les 10 parties. Chaque partie gagnée lui rapporte 8 €.

a. Expliquer pourquoi ce jeu est désavantageux pour le joueur.

b. Calculer la probabilité pour un joueur de réaliser un bénéfice supérieur à 40 € ?

Le résultat sera arrondi à 10^{-5} près.

CORRECTION

EXERCICE 1 5 points Commun à tous les candidats

Partie A : Étude d'une fonction

1. *a.* $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

b. $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln x = 0$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -1$

2. $\begin{cases} u(x) = x & u'(x) = 1 \\ v(x) = \ln x & v'(x) = \dfrac{1}{x} \end{cases}$ donc $f'(x) = 1 \times \ln x + x \times \dfrac{1}{x} = \ln x + 1$ pour tout réel x de $]\,0\,;+\infty\,[$.

$\ln x + 1 > 0 \Leftrightarrow \ln x > -1 \Leftrightarrow x > e^{-1}$

x	0		e^{-1}		α	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$		
f	-1	$\searrow$	$-e^{-1}-1$	$\nearrow$	0	$+\infty$

3. La fonction f est décroissante sur $]\,0\,;e^{-1}\,]$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -1$ donc pour tout x de $]\,0\,;e^{-1}\,]$, $f(x) < -1$

La fonction f ne s'annule pas sur $]\,0\,;e^{-1}\,]$.

La fonction est définie strictement croissante sur $[e^{-1}\,;+\infty\,[$, $f([e^{-1}\,;+\infty\,[) = [-e^{-1}-1\,;+\infty\,[$

$0 \in [-e^{-1}-1\,;+\infty\,[$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution dans $[e^{-1}\,;+\infty\,[$ donc sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

$f(1{,}76) \approx -0{,}005$ et $f(1{,}77) \approx 0{,}01$ donc $1{,}76 < \alpha < 1{,}77$.

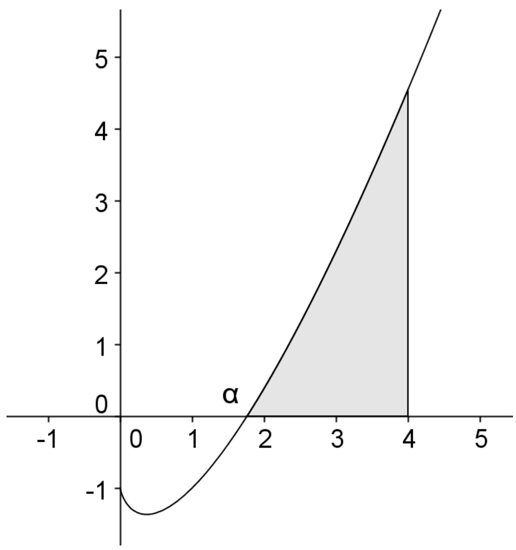
4.

x	0		e^{-1}		α	$+\infty$
f	-1	$\searrow$	$-e^{-1}-1$	$\nearrow$	0	$+\infty$
$f(x)$		$-$			0	$+$

5. α est solution de $f(x) = 0 \Leftrightarrow \alpha \ln \alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \alpha \ln \alpha = 1 \Leftrightarrow \ln \alpha = \dfrac{1}{\alpha}$.

Partie B : Calcul d'une intégrale

1. La fonction f est définie continue positive sur $[\alpha\,;4]$ donc l'intégrale I est l'aire de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe et les droites d'équations $x = \alpha$ et $x = 4$.



2. $\begin{cases} u'(x) = x & u(x) = \dfrac{1}{2}x^2 \\ v(x) = \ln x & v'(x) = \dfrac{1}{x} \end{cases}$ donc :

$J = \displaystyle\int_\alpha^4 x \ln x \,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}x^2 \ln x\right]_\alpha^4 - \int_\alpha^4 \frac{1}{2}x^2 \times \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$

$J = \displaystyle\left[\frac{1}{2}x^2 \ln x\right]_\alpha^4 - \frac{1}{2}\int_\alpha^4 x\,\mathrm{d}x$

$J = \displaystyle\left[\frac{1}{2}x^2 \ln x\right]_\alpha^4 - \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_\alpha^4$

$J = 8 \ln 4 - \dfrac{1}{2}\alpha^2 \ln \alpha - 4 + \dfrac{1}{4}\alpha^2$ or $\ln \alpha = \dfrac{1}{\alpha}$ donc $\alpha \ln \alpha = 1$ et $4 = 2^2$ donc $\ln 4 = 2 \ln 2$ donc $J = 16 \ln 2 - \dfrac{1}{2}\alpha - 4 + \dfrac{1}{4}\alpha^2$

3. $I = J - \displaystyle\int_\alpha^4 \mathrm{d}x = 16 \ln 2 - \frac{1}{2}\alpha - 4 + \frac{1}{4}\alpha^2 - (4 - \alpha)$ donc $I = \dfrac{\alpha^2}{4} + \dfrac{\alpha}{2} + 16 \ln 2 - 8$.

$1{,}76 < \alpha < 1{,}77$ donc $1{,}76^2 < \alpha^2 < 1{,}77^2$ donc $\dfrac{1{,}76^2}{4} + \dfrac{1{,}76}{2} + 16 \ln 2 - 8 < I < \dfrac{1{,}77^2}{4} + \dfrac{1{,}77}{2} + 16 \ln 2 - 8$.

$4{,}74 < I < 4{,}76$ donc $I \approx 4{,}7$ à 10^{-1} près.

EXERCICE 2 5 points Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. ***a.*** $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées (2 ; – 8 ; – 2), $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées (3 ; 0 ; 1) Ces vecteurs ne sont pas colinéaires (coordonnées non proportionnelles) donc les points A, B et C définissent bien un plan.

b. $\vec{n}\,.\,\overrightarrow{AB} = 1 \times 2 + 1 \times (-8) + (-3) \times (-2) = 2 - 8 + 6 = 0$,
$\vec{n}\,.\,\overrightarrow{AC} = 1 \times 3 + 1 \times 0 + (-3) \times 1 = 3 - 3 = 0$
$\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) donc le vecteur $\vec{n}$ (1 ; 1 ; – 3) est un vecteur normal au plan (ABC).

c. Le plan (ABC) est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{CM}\,.\,\vec{n} = 0$ soit $x - 2 + y - 2 - 3(z - 2) = 0$
Une équation cartésienne du plan (ABC) est $x + y - 3z + 2 = 0$

2. ***a.*** Le vecteur $\vec{n'}$ (1 ; – 1 ; 1) est un vecteur normal au plan P. Les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ ne sont pas colinéaires donc les plans (ABC) et P sont sécants.

b. Soit M un point de D, D est la droite intersection des plans P et (ABC) donc les coordonnées de M vérifient $\begin{cases} x + y - 3z + 2 = 0 \\ x - y + z - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2z - 2 = 0 \\ x - y + z - 4 = 0 \end{cases}$ (en additionnant terme à terme les deux équations) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = z + 1 \\ x - y + z - 4 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = z + 1 \\ z + 1 - y + z - 4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = z + 1 \\ y = 2z - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t - 3 \\ z = t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$.

Une représentation paramétrique de la droite D est $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t - 3 \\ z = t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$.

3. On considère la sphère S de centre Ω (3 ; 1 ; 3) et de rayon 3 et on nomme I le point de coordonnées (2 ; – 1 ; 1).

a. Une représentation paramétrique de la droite D est $\begin{cases} x = t + 1 \\ y = 2t - 3 \\ z = t \end{cases}$ $t \in \mathbb{R}$, le point de D de cote 1 a pour paramètre $t = 1$ et pour coordonnées (2 ; – 1 ; 1), donc le point I appartient à la droite D.

b. $I\Omega^2 = (2 - 3)^2 + (-1 - 1)^2 + (1 - 3)^2 = 1 + 4 + 4 = 9$ donc $I\Omega = 3$, le point I appartient à la sphère S.

c. Soit M un point d'intersection de S et de D, alors $\Omega M^2 = 9$ soit $(t + 1 - 3)^2 + (2t - 3 - 1)^2 + (t - 3)^2 = 9$
soit $(t - 2)^2 + (2t - 4)^2 + (t - 3)^2 = 9 \Leftrightarrow t^2 - 4t + 4 + 4t^2 - 16t + 16 + t^2 - 6t + 9 = 9 \Leftrightarrow 6t^2 - 26t + 20 = 0 \Leftrightarrow 3t^2 - 13t + 10 = 0$
Cette équation admet deux solutions $t_1 = 1$ et $t_2 = \frac{10}{3}$ donc la droite D coupe la sphère S en deux points l'un est I (paramètre $t = 1$) l'autre I' (paramètre $t = \frac{10}{3}$).

EXERCICE 2 5 points Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. *a.* $M \in P \cap P_{z=5} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ z = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ z = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \Omega M^2 = 5$ et $z = 5$ où Ω est le point de coordonnées (0 ; 0 ; 5)

L'intersection de l'ensemble *P* et du plan d'équation $z = 5$ est un cercle de centre Ω (0 ; 0 ; 5) et de rayon $\sqrt{5}$.

b. $M \in P \cap P_{y=1} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x^2 + 1 \\ y = 1 \end{cases}$.

L'intersection de l'ensemble *P* et du plan d'équation $y = 1$ est une parabole d'axe (O z) de sommet S(0 ; 1 ; 1) dans le plan d'équation $y = 1$.

2. *a.* S est l'ensemble des points M de l'espace tels que $OM^2 = 6$. Une équation de la sphère *S* est $x^2 + y^2 + z^2 = 6$.

b. $M \in S \cap P \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ x^2 + y^2 + z^2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ z + z^2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ z^2 + z - 6 = 0 \end{cases}$

L'équation $z^2 + z - 6 = 0$ admet deux solutions $z_1 = 2$ et $z_2 = -3$

$M \in S \cap P \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ z = 2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x^2 + y^2 = z \\ z = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ z = 2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x^2 + y^2 = -3 \\ z = -3 \end{cases}$

$x^2 + y^2 \geq 0$ donc il est impossible que $x^2 + y^2 = -3$

$M \in S \cap P \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ z = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \Omega' M^2 = 2$ et $z = 2$ où Ω' est le point de coordonnées (0 ; 0 ; 2)

L'intersection de la sphère *S* et de l'ensemble *P* est un cercle de centre Ω' (0 ; 0 ; 2) de rayon $\sqrt{2}$.

3. *a.* $-3 \times 1 + 2 \times 2 = 1$ donc un couple d'entiers relatifs solution de l'équation (E) : $-3x + 2y = 1$ est (1 ; 2).

b. $(x ; y)$ solution de $-3x + 2y = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} -3x + 2y = 1 \\ -3 \times 1 + 2 \times 2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow -3(x-1) + 2(y-2) = 0 \Leftrightarrow 3(x-1) = 2(y-2)$

$3(x-1) = 2(y-2)$ donc 3 divise $2(y-2)$ or 2 et 3 sont premiers entre eux donc 3 divise $y - 2$

Il existe un entier relatif k tel que $y - 2 = 3k$ soit $y = 3k + 2$

En remplaçant dans $3(x-1) = 2(y-2)$ on obtient $3(x-1) = 2 \times 3k$ soit $x - 1 = 2k$ donc $x = 2k + 1$

Vérification : $-3x + 2y = -3(2k+1) + 2(3k+2) = -6k - 3 + 6k + 4 = 1$

L'ensemble des couples $(x ; y)$ d'entiers relatifs solutions de l'équation (E) est $(2k + 1 ; 3k + 2)$ avec $k \in \mathbb{Z}$.

P est l'ensemble des points tels que $z = x^2 + y^2$ donc $z = (2k+1)^2 + (3k+2)^2 = 13k^2 + 16k + 5$

$z \leq 25$ donc $13k^2 + 16k + 5 \leq 25$ soit $13k^2 + 16k - 20 \leq 0$

$\Delta = 1296 = 36^2$ donc $k_1 = -2$ et $k_2 = \dfrac{10}{13}$

$13k^2 + 16k - 20 \leq 0 \Leftrightarrow k \in \left[-2 ; \dfrac{10}{13}\right]$

k est un entier relatif donc $k \in \{-2 ; -1 ; 0\}$

k	-2	-1	0
$x = 2k + 1$	-3	-1	1
$y = 3k + 2$	-4	-1	2
$z = x^2 + y^2$	25	2	5

Les points de l'ensemble P dont les coordonnées $(x ; y ; z)$ sont des entiers relatifs vérifiant : $-3x + 2y = 1$ et $z \leq 25$ sont les points :

A (– 3 ; – 4 ; 25) B (– 1 ; – 1 ; 2) et C (1 ; 2 ; 5)

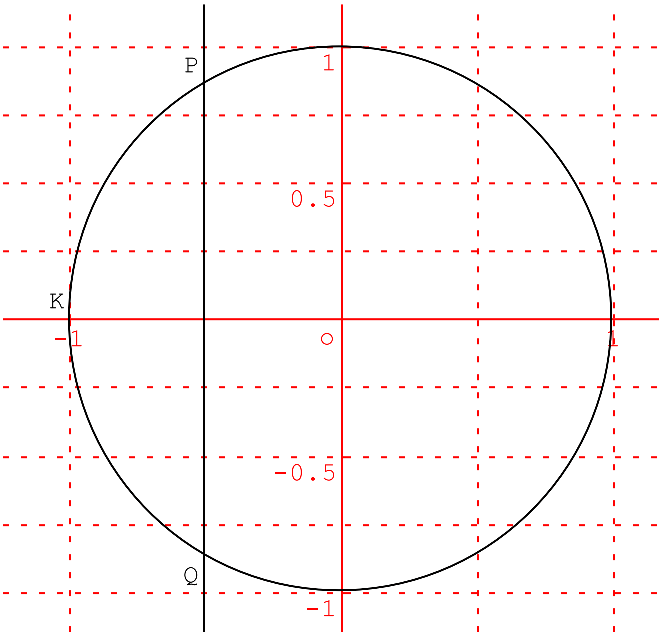
EXERCICE 3 5 points Commun à tous les candidats

Partie A :

1. *a.* $|p|^2 = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 = 1$ donc $|p| = 1$

$q = \overline{p}$ donc $|q| = |p| = 1$ donc les points P et Q appartiennent au cercle Γ de centre O et de rayon 1.

b.



2. *a.* $|z| = \text{OM}$ et $|z+1| = \text{KM}$ donc l'ensemble D des points M d'affixe z tels que $|z| = |z+1|$ est l'ensemble des points M tels que OM = KM donc D est la médiatrice de [OK].

b. $p - (-1) = \frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $|p| = |p+1|$ donc $\text{P} \in \text{D}$ or $\text{P} \in \Gamma$ donc P est un point d'intersection de la droite D et du cercle Γ.

$q - (-1) = \frac{1}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $|q| = |q+1|$ donc $\text{Q} \in \text{D}$ or $\text{Q} \in \Gamma$ donc Q est un point d'intersection de la droite D et du cercle Γ.

Une droite coupe un cercle en au plus deux points donc P et Q sont les points d'intersection de l'ensemble D et du cercle Γ.

Partie B :

1. *a.* O est le centre du cercle circonscrit du triangle ABC donc OA = OB = OC donc $|a| = |b| = |c|$.

$a \neq 0$ donc $|a| \neq 0$ donc puisque $|a| = |b| = |c|$. alors $\left|\frac{b}{a}\right| = \left|\frac{c}{a}\right| = 1$

b. O est le centre de gravité du triangle ABC, donc $\frac{a+b+c}{3} = 0$ donc $a + b + c = 0$.

c. $a + b + c = 0$ donc $c = -(b+a)$ donc $\frac{c}{a} = -\frac{b+a}{a} = -\left(1 + \frac{b}{a}\right)$ donc $\left|\frac{c}{a}\right| = \left|\frac{b}{a} + 1\right|$ or $\left|\frac{b}{a}\right| = \left|\frac{c}{a}\right| = 1$ donc $\left|\frac{b}{a}\right| = \left|\frac{b}{a} + 1\right| = 1$.

d. $\left|\frac{b}{a}\right| = 1$ donc le point d'affixe $\frac{b}{a}$ appartient au cercle de centre O de rayon 1 donc à Γ.

$\left|\frac{b}{a}\right| = \left|\frac{b}{a} + 1\right| = 1$ donc le point d'affixe $\frac{b}{a}$ appartient à la droite D donc est un point d'intersection de cette droite et du cercle Γ.

donc $\frac{b}{a} = p$ ou $\frac{b}{a} = q$.

2. Dans cette question, on admet que $\frac{b}{a} = p$ et $\frac{c}{a} = q$.

a. $q - 1 = -\frac{3}{2} - \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3} + \mathrm{i})$ et $p - 1 = -\frac{3}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3} - \mathrm{i})$

$$\frac{q-1}{p-1} = \frac{\sqrt{3}+\mathrm{i}}{\sqrt{3}-\mathrm{i}} = \frac{(\sqrt{3}+\mathrm{i})^2}{(\sqrt{3}-\mathrm{i})(\sqrt{3}+\mathrm{i})} = \frac{2+2\mathrm{i}\sqrt{3}}{4} = \frac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}.$$

(On *aurait pu aussi utiliser la forme exponentielle de* $\sqrt{3} + \mathrm{i}$ et de $\sqrt{3} - \mathrm{i}$).

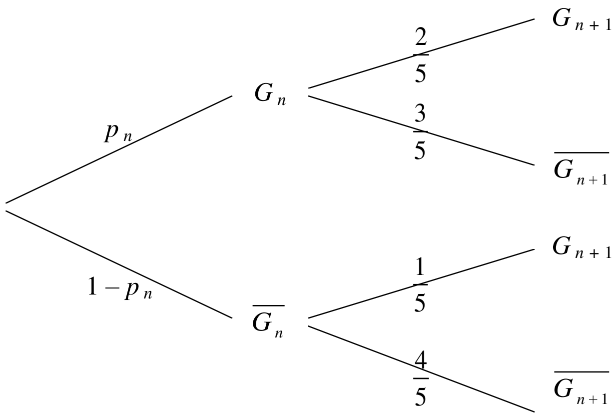
b. $\frac{c}{a} = q$ donc $q - 1 = \frac{c-a}{a}$; $\frac{b}{a} = p$ donc $p - 1 = \frac{b-a}{a}$ donc $\frac{q-1}{p-1} = \frac{\frac{c-a}{a}}{\frac{b-a}{a}} = \frac{c-a}{b-a}$.

c. $\frac{c-a}{b-a} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ donc $\begin{cases} \left|\frac{c-a}{b-a}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$ $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{AC} = \text{AB} \\ (\overrightarrow{\text{AB}}, \overrightarrow{\text{AC}}) = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \end{cases}$ $k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$ le triangle ABC est équilatéral.

EXERCICE 4 5 points Commun à tous les candidats

Partie A :

1.



2. pour tout n entier naturel non nul, $p_{n+1} = p(G_n \cap G_{n+1}) + p(\overline{G_n} \cap G_{n+1})$

$p_{n+1} = p_n \times \frac{2}{5} + (1-p_n) \times \frac{1}{5} \Leftrightarrow p_{n+1} = \frac{2}{5}p_n - \frac{1}{5}p_n + \frac{1}{5} \Leftrightarrow p_{n+1} = \frac{1}{5}p_n + \frac{1}{5}$.

3. *a.* $u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{1}{4} = \frac{1}{5}p_n + \frac{1}{5} - \frac{1}{4}$

$u_{n+1} = \frac{1}{5}p_n - \frac{1}{20} \Leftrightarrow u_{n+1} = \frac{1}{5}\left(p_n + \frac{1}{4}\right)$ or $u_n = p_n - \frac{1}{4} \Leftrightarrow p_n = u_n + \frac{1}{4}$ donc $u_{n+1} = \frac{1}{5}\left(p_n + \frac{1}{4}\right) \Leftrightarrow u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n$

$(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$ et de premier terme $u_1 = p_1 - \frac{1}{4}$ soit $u_1 = \frac{3}{4}$ donc $u_n = \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$

b. Pour tout n entier naturel non nul, $p_n = u_n + \frac{1}{4}$ donc pour tout n entier naturel non nul, $p_n = \frac{3}{4} \times \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{4}$.

c. $-1 < \frac{1}{5} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \frac{1}{4}$.

Partie B :

1. *a.* On a une succession de 10 expériences aléatoires identiques et indépendantes, chacune d'elles a deux issues :

- réussite : le joueur gagne ($p = 0{,}25$)
- échec : le joueur ne gagne pas ($q = 1 - p = 0{,}75$)

donc la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées par le joueur suit une loi binomiale de paramètres (10 ; 0,25).

b. $p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - 0{,}75^{10}$ soit environ 0,94

c. L'espérance de X est égale à $n\,p$ soit $10 \times 0{,}25$ donc 2,5.

2. *a.* Le joueur en moyenne gagne 2,5 parties donc reçoit $8 \times 2{,}5 = 20$ € or il paye 30 € pour pouvoir jouer donc ce jeu est désavantageux pour le joueur.

b. Le joueur réalise un bénéfice supérieur à 40 € s'il reçoit au moins 70 € (la somme versée initiale ment pour pouvoir jouer plus le bénéfice).
Une partie gagnée rapport 8 € donc le joueur doit gagner au moins 9 parties.
$p(X \geq 9) = p(X = 9) + p(X = 10)$ soit environ 0,00003.