

# BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

SESSION 2012

## MATHÉMATIQUES

Série S

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 9

**ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ**

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées,  
conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices.  
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.  
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développée.  
Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 6 pages numérotées de 1/6 à 6/6.

## EXERCICE 1 (4 points)

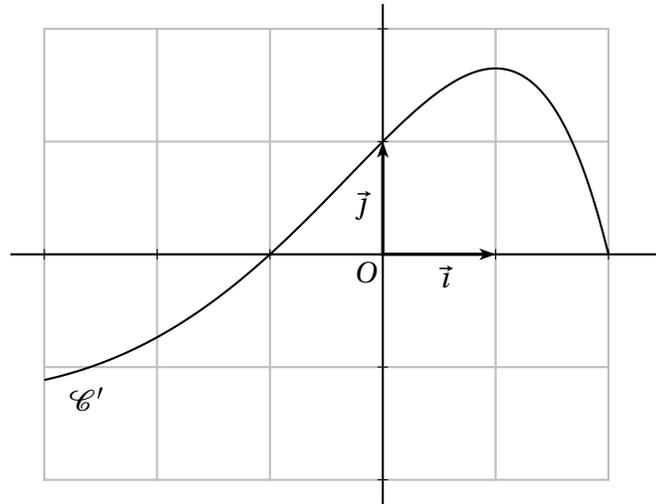
### Commun à tous les candidats

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O; \vec{i}, \vec{j})$ .

On considère une fonction  $f$  dérivable sur l'intervalle  $[-3, 2]$ .

On dispose des informations suivantes :

- $f(0) = -1$ .
- la dérivée  $f'$  de la fonction  $f$  admet la courbe représentative  $\mathcal{C}'$  ci-dessous.



Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. Pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[-3, -1]$ ,  $f'(x) \leq 0$ .
2. La fonction  $f$  est croissante sur l'intervalle  $[-1, 2]$ .
3. Pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[-3, 2]$ ,  $f(x) \geq -1$ .
4. Soit  $\mathcal{C}$  la courbe représentative de la fonction  $f$ .  
La tangente à la courbe  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse 0 passe par le point de coordonnées  $(1, 0)$ .

## EXERCICE 2 (5 points)

### Commun à tous les candidats

Pour embaucher ses cadres une entreprise fait appel à un cabinet de recrutement. La procédure retenue est la suivante. Le cabinet effectue une première sélection de candidats sur dossier. 40% des dossiers reçus sont validés et transmis à l'entreprise. Les candidats ainsi sélectionnés passent un premier entretien à l'issue duquel 70% d'entre eux sont retenus. Ces derniers sont convoqués à un ultime entretien avec le directeur des ressources humaines qui recrutera 25% des candidats rencontrés.

1. On choisit au hasard le dossier d'un candidat.

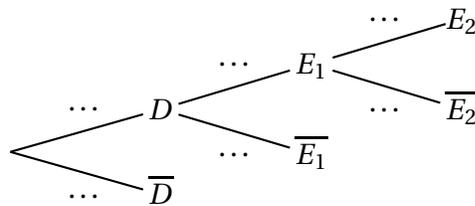
On considère les événements suivants :

$D$  : « Le candidat est retenu sur dossier »,

$E_1$  : « Le candidat est retenu à l'issue du premier entretien »,

$E_2$  : « Le candidat est recruté ».

- a. Reproduire et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



- b. Calculer la probabilité de l'événement  $E_1$ .

- c. On note  $F$  l'événement « Le candidat n'est pas recruté ».

Démontrer que la probabilité de l'événement  $F$  est égale à 0,93.

2. Cinq amis postulent à un emploi de cadre dans cette entreprise. Les études de leur dossier sont faites indépendamment les unes des autres. On admet que la probabilité que chacun d'eux soit recruté est égale à 0,07.

On désigne par  $X$  la variable aléatoire donnant le nombre de personnes recrutées parmi ces cinq candidats.

- a. Justifier que  $X$  suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.

- b. Calculer la probabilité que deux exactement des cinq amis soient recrutés. On arrondira à  $10^{-3}$ .

3. Quel est le nombre minimum de dossiers que le cabinet de recrutement doit traiter pour que la probabilité d'embaucher au moins un candidat soit supérieure à 0,999 ?

### EXERCICE 3 (6 points)

*Commun à tous les candidats*

*Il est possible de traiter la partie C sans avoir traité la partie B.*

#### Partie A

On désigne par  $f$  la fonction définie sur l'intervalle  $[1, +\infty[$  par

$$f(x) = \frac{1}{x+1} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right).$$

1. Déterminer la limite de la fonction  $f$  en  $+\infty$ .
2. Démontrer que pour tout réel  $x$  de l'intervalle  $[1, +\infty[$ ,  $f'(x) = \frac{1}{x(x+1)^2}$ .  
Dresser le tableau de variation de la fonction  $f$ .
3. En déduire le signe de la fonction  $f$  sur l'intervalle  $[1, +\infty[$ .

#### Partie B

Soit  $(u_n)$  la suite définie pour tout entier strictement positif par  $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n$ .

1. On considère l'algorithme suivant :

Variables :	$i$ et $n$ sont des entiers naturels. $u$ est un réel.
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de $n$ .
Initialisation :	Affecter à $u$ la valeur 0.
Traitement :	Pour $i$ variant de 1 à $n$ .   Affecter à $u$ la valeur $u + \frac{1}{i}$ .
Sortie :	Afficher $u$ .

- Donner la valeur exacte affichée par cet algorithme lorsque l'utilisateur entre la valeur  $n = 3$ .
2. Recopier et compléter l'algorithme précédent afin qu'il affiche la valeur de  $u_n$  lorsque l'utilisateur entre la valeur de  $n$ .
3. Voici les résultats fournis par l'algorithme modifié, arrondis à  $10^{-3}$ .

$n$	4	5	6	7	8	9	10	100	1000	1500	2000
$u_n$	0,697	0,674	0,658	0,647	0,638	0,632	0,626	0,582	0,578	0,578	0,577

À l'aide de ce tableau, formuler des conjectures sur le sens de variation de la suite  $(u_n)$  et son éventuelle convergence.

## Partie C

*Cette partie peut être traitée indépendamment de la partie B.*

Elle permet de démontrer les conjectures formulées à propos de la suite  $(u_n)$  telle que pour tout entier strictement positif  $n$ ,

$$u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \ln n.$$

1. Démontrer que pour tout entier strictement positif  $n$ ,

$$u_{n+1} - u_n = f(n)$$

où  $f$  est la fonction définie dans la partie A.

En déduire le sens de variation de la suite  $(u_n)$ .

2. a. Soit  $k$  un entier strictement positif.

Justifier l'inégalité  $\int_k^{k+1} \left( \frac{1}{k} - \frac{1}{x} \right) dx \geq 0$ .

En déduire que  $\int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k}$ .

Démontrer l'inégalité  $\ln(k+1) - \ln k \leq \frac{1}{k}$  (1).

- b. Écrire l'inégalité (1) en remplaçant successivement  $k$  par  $1, 2, \dots, n$  et démontrer que pour tout entier strictement positif  $n$ ,

$$\ln(n+1) \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}.$$

- c. En déduire que pour tout entier strictement positif  $n$ ,  $u_n \geq 0$ .

3. Prouver que la suite  $(u_n)$  est convergente. On ne demande pas de calculer sa limite.

## EXERCICE 4 (5 points)

### Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}, \vec{v})$ .

On désigne par  $A, B$  et  $C$  les points d'affixes respectives  $z_A = -1 + i$ ,  $z_B = 2i$  et  $z_C = 1 + 3i$  et  $\mathcal{D}$  la droite d'équation  $y = x + 2$ .

1. Prouver que les points  $A, B$  et  $C$  appartiennent à la droite  $\mathcal{D}$ .  
Sur une figure que l'on fera sur la copie en prenant 2 cm pour unité graphique, placer les points  $A, B, C$  et tracer la droite  $\mathcal{D}$ .
2. Résoudre l'équation  $(1 + i)z + 3 - i = 0$  et vérifier que la solution de cette équation est l'affixe d'un point qui n'appartient pas à la droite  $\mathcal{D}$ .

Dans la suite de l'exercice, on appelle  $f$  l'application qui, à tout point  $M$  d'affixe  $z$  différente de  $-1 + 2i$ , fait correspondre le point  $M'$  d'affixe  $\frac{1}{(1 + i)z + 3 - i}$ .

Le but de l'exercice est de déterminer l'image par  $f$  de la droite  $\mathcal{D}$ .

3. Soit  $g$  la transformation du plan qui, à tout point  $M$  d'affixe  $z$ , fait correspondre le point  $M_1$  d'affixe  $(1 + i)z + 3 - i$ .
  - a. Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la transformation  $g$ .
  - b. Calculer les affixes des points  $A_1, B_1$  et  $C_1$ , images respectives par  $g$  des points  $A, B$  et  $C$ .
  - c. Déterminer l'image  $\mathcal{D}_1$  de la droite  $\mathcal{D}$  par la transformation  $g$  et la tracer sur la figure.
4. Soit  $h$  l'application qui, à tout point  $M$  d'affixe  $z$  non nulle, fait correspondre le point  $M_2$  d'affixe  $\frac{1}{z}$ .
  - a. Déterminer les affixes des points  $h(A_1), h(B_1)$  et  $h(C_1)$  et placer ces points sur la figure.
  - b. Démontrer que, pour tout nombre complexe non nul  $z$ , on a :

$$\left| \frac{1}{z} - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{2} \Leftrightarrow |z - 2| = |z|.$$

- c. En déduire que l'image par  $h$  de la droite  $\mathcal{D}_1$  est incluse dans un cercle  $\mathcal{C}$  dont on précisera le centre et le rayon. Tracer ce cercle sur la figure.
  - d. Démontrer que tout point du cercle  $\mathcal{C}$  qui est distinct de  $O$  est l'image par  $h$  d'un point de la droite  $\mathcal{D}_1$ .
5. Déterminer l'image par l'application  $f$  de la droite  $\mathcal{D}$ .