BACCALAURÉAT GÉNÉRAL

Session janvier 2014

MATHÉMATIQUES

Série S

ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE

Durée d'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

Les calculatrices de poche sont autorisées,
conformément à la réglementation en vigueur.

Le sujet est composé de 5 exercices indépendants. Le candidat doit traiter tous les exercices. Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.
Le candidat est invité à faire figurer sur la copie toute trace de recherche, même incomplète ou non fructueuse, qu'il aura développé. Il est rappelé que la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.

Exercice 1 : `Restitution organisée de connaissances` (2 points)

On suppose connus les résultats suivants :

∗ on dit que deux évènements A et B sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$;

∗ si A et B sont deux évènements, alors $P(B) = P(A \cap B) + P(\overline{A} \cap B)$.

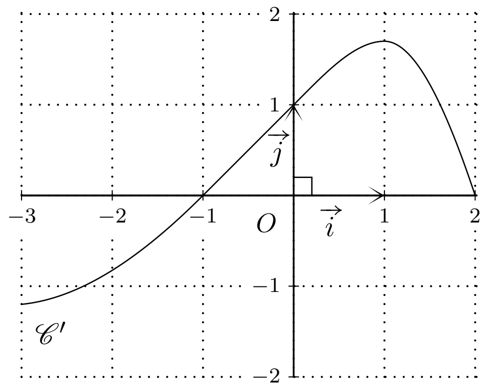
Démontrer alors la proposition suivante :

« Si A et B sont deux évènements indépendants, alors les évènements $\overline{A}$ et B le sont aussi. »

Exercice 2 : (4 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$).
On considère une fonction f dérivable sur l'intervalle $[-3 \,;\, 2]$.
On dispose des informations suivantes :

- $f(0) = -1$;
- la dérivée f' de la fonction f admet la courbe représentative $\mathscr{C}'$ ci-dessous



Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse et justifier la réponse.

1. Pour tout réel x de l'intervalle $[-3 \,;\, -1]$, $f'(x) \leqslant 0$.
2. La fonction f est croissante sur l'intervalle $[-1 \,;\, 2]$.
3. Pour tout réel x de l'intervalle $[-3 \,;\, 2]$, $f(x) \geqslant -1$.
4. Soit $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f.
   La tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 passe par le point de coordonnées $(1 \,;\, 0)$.

Exercice 3 : (4 points)

Pré-requis : ☞ Pour tout nombre complexe Z, $|Z| = \sqrt{Z\overline{Z}} \in \mathbb{R}$,

☞ Dans une base orthonormale, deux vecteurs $\vec{e_1}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ et $\vec{e_2}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$ sont orthogonaux si, et seulement si $\vec{e_1}\cdot\vec{e_2} = xx' + yy' = 0$.

Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct (O ; $\vec{u}, \vec{v}$), on considère les points A et B d'affixes respectives 2 et -2 et on définit l'application f qui à tout point M d'affixe z et différent de A associe le point M' d'affixe

$$z' = \frac{\overline{z}(z-2)}{\overline{z}-2} .$$

1. a) Déterminer l'affixe du point P' image par f du point P d'affixe $1 + \mathrm{i}$.
   b) Montrer que les droites (AP) et (BP') sont parallèles.
   c) Établir que les droites (AP) et (PP') sont perpendiculaires.
2. Déterminer l'ensemble des points invariants par f (c'est-à-dire l'ensemble des points tels que $M' = M$).

   On cherche à généraliser les propriétés 1.b et 1.c pour obtenir une construction de l'image M' d'un point M quelconque (différent de A) du plan.
3. a) Montrer que pour tout nombre complexe z, le nombre $(z-2)(\overline{z}-2)$ est réel.
   b) En déduire que pour tout nombre complexe distinct de 2, $\frac{z'+2}{z-2}$ est réel.
   c) Montrer que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{BM'}$ sont colinéaires.

NE PAS TRAITER LES QUESTIONS SUIVANTES

4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Soit M un point quelconque non situé sur l'axe des réels. Généraliser les résultats de la question 1.c.
5. Soit M un point distinct de A. Déduire des questions précédentes une construction du point M' image de M par f. Réaliser une figure pour le point Q d'affixe $3 - 2\mathrm{i}$.

Exercice 4 : (5 points)

Les résultats seront donnés en fractions irréductibles.

Un club de tennis comporte 500 adhérents dont 300 hommes. Le tennis, en compétition, est pratiqué par 30 % des hommes et 20 % des femmes.

Les autres adhérents pratiquent ce sport uniquement pour le loisir.

On choisit, au hasard, un adhérent. On note les évènements :

- ☞ F : « l'adhérent est une femme » ;
- ☞ C : « l'adhérent pratique la compétition ».

1. a) Indiquer la valeur de $P(F)$.
   b) Sachant que la personne choisie est une femme, quelle est la probabilité qu'elle pratique le tennis en compétition ?
   c) Construire un arbre pondéré résumant la situation.
   d) Calculer la probabilité que la personne choisie pratique le tennis en compétition.
2. L'adhérent choisit la compétition. Quelle est la probabilité que ce soit une femme ?
3. Montrer que la probabibilité qu'un adhérent soit une femme qui pratique la compétition est $\frac{2}{25}$.
4. Le secrétaire de ce club doit contacter un certain nombre d'adhérents. Il les choisit parfaitement au hasard, sans se préoccuper de savoir s'il les a déjà contactés ou non.
   a) Que signifie la phrase précédente ?
   b) S'il choisit 4 adhérents, quelle est la probabilité qu'il contacte au moins une femme qui pratique la compétition ?
   c) Donner la valeur affichée par l'algorithme ci-contre et interpréter le résultat.

Début
- Variables :
  - n est un entier
- Initialisation :
  - n prend la valeur 0
- Traitement :
  - **Tantque** $\left(\frac{23}{25}\right)^n > 0{,}1$ **Faire**
    - n prend la valeur $n+1$
  - **FinTantque**
- Sortie :
  - Afficher(n)

Fin

Exercice 5 : (5 points)

Partie A -

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -x\mathrm{e}^x + 1$.

1. Calculer les limites de g en $-\infty$ et $+\infty$.
2. Étudier les variations de g sur $\mathbb{R}$.
3. Prouver que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$.
   Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}.
4. En déduire le signe de la fonction g suivant les valeurs de x.

Partie B -

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x+1}{\mathrm{e}^x + 1}$.
On appelle $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(\mathrm{O}\ ; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$(unité : 1 cm).

1. Déterminer le domaine de définition de la fonction f.
2. Calculer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$. Donner une interprétation graphique.
3. a) Calculer l'expression de la fonction dérivée de f, et prouver que pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x)$ et $g(x)$ sont de même signe.
   b) En déduire le sens de variation de f sur $\mathbb{R}$.
4. Donner une équation de la tangente $\mathscr{T}$ à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
5. Tracer $\mathscr{T}$, les éventuelles asymptotes et la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère $(\mathrm{O}\ ; \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$.