CORRIGE DE L'EPREUVE DE MATHEMATIQUES
DU BACCALAUREAT
FILIERE SCIENTIFIQUE 2013

EXERCICE 1:

C donc $P\ \ H_1 \cap C\ \ = 0{,}35 \times 0{,}8 = 0{,}28$

H_1

F donc $P\ \ H_1 \cap F\ \ = 0{,}35 \times 0{,}2 = 0{,}07$

C donc $P\ \ H_2 \cap C\ \ = 0{,}25 \times 0{,}5 = 0{,}125$

H_2

F donc $P\ \ H_2 \cap F\ \ = 0{,}25 \times 0{,}5 = 0{,}125$

C donc $P\ \ H_3 \cap C\ \ = 0{,}3 \times 0{,}4 = 0{,}12$

H_3

F donc $P\ \ H_3 \cap F\ \ = 0{,}4 \times 0{,}7 = 0{,}28$

1) b) $P\ \ H_3 \cap C\ \ = P_{H_3}\ \ C\ \ \times P\ \ H_3\ \ = 0{,}12$

c) On utilise la formule des probabilités totales :

$P\ \ C\ \ = P_{H_1}\ \ C\ \ \times P\ \ H_1\ \ + P_{H_2}\ \ C\ \ \times P\ \ H_2\ \ + P_{H_3}\ \ C\ \ \times P\ \ H_3$

$= 0{,}28 + 0{,}125 + 0{,}12 = 0{,}525$

d) $P_C\ \ H_1\ \ = \frac{P\ \ H_1 \cap C}{P\ \ C} = \frac{0{,}28}{0{,}525} = 0{,}533$

2) a) Les tirages étant assimilés à des tirages avec remise et étant donné qu'ils sont indépendants alors X suit une loi binomiale de paramètres 10 et 0,533

b) $P\ \ X = 5\ \ = \ \ {10 \atop 5}\ \ 0{,}533\ ^5\ \ 1 - 0{,}533\ ^5 = 252\ \ 0{,}533\ ^5\ \ 1 - 0{,}533\ ^5 = 0{,}241.$

c) $P\ \ au\ moins\ 2\ feuillus\ \ = P\ \ au\ plus\ 8\ conif\grave{e}res\ \ = P\ \ X \leq 8\ \ = 1 - P\ \ X = 10\ \ - P\ \ X = 9$

Et grâce à la calculatrice on trouve 0,981.

CORRIGE DE L'EPREUVE DE MATHEMATIQUES
DU BACCALAUREAT
FILIERE SCIENTIFIQUE 2013

EXERCICE 2 :

1) a) $f(1) = 2$ et $f'(1) = 0$

b) $f'(x) = \frac{(a+b\ln x)'\times x-(a+b\ln x)\times (x)'}{x^2} = \frac{\frac{b}{x}\times x-(a+b\ln x)\times 1}{x^2} = \frac{b-a-b\ln(x)}{x^2} = \frac{b-a-b\ln x}{x^2}$

c) $f(1) = 2 \Leftrightarrow \frac{a+b\ln 1}{1} = 2 \Leftrightarrow a = 2$ puis $f'(1) = 0 \Leftrightarrow \frac{b-a-b\ln 1}{1^2} = 0 \Leftrightarrow b = a$

donc $f(x) = \frac{2+2\ln x}{x} = \frac{2}{x}+\frac{2\ln x}{x}$

2) a) $f'(x) \underset{linéarité}{=} 2\left(\frac{1}{x}\right)' + 2\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = -\frac{2}{x^2}+\frac{2\left(\frac{1}{x}\times x-\ln x\times 1\right)}{x^2} = \frac{-2+2-2\ln x}{x^2} = -\frac{2\ln x}{x^2}$

Comme $x^2 \geq 0$ alors $\frac{2}{x^2} > 0$ et donc le signe de $f'(x)$ ne dépend que de $-\ln(x)$

b) $\lim_{x\to 0+} 2+2\ln(x) = -\infty$ car $\lim_{x\to 0+} \ln(x) = -\infty$

Puis $\lim_{x\to 0+} x = 0+$ donc $\lim_{x\to 0+} f(x) = -\infty$.

La droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale

$\lim_{x\to +\infty} \frac{2}{x} = 0+$ et $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ donc $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0+$

La droite d'équation $y = 0$ est asymptote horizontale

c) pour x dans $]0;1]$ $-\ln(x) \geq 0 \Leftrightarrow f$ est croissante sur $]0;1]$

pour x dans $]1;+\infty[$ $-\ln(x) < 0 \Leftrightarrow f$ est décroissante sur $]1;+\infty[$

3) a) f est continue sur l'intervalle $]0;1[$ et $f(]0;1[) =]-\infty;2[$, or $1 \in]-\infty;2[$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\propto \in]0;1[$ tel que $f(\propto) = 1$, de plus, comme f est strictement monotone sur cet intervalle alors cet $\propto$ est unique.

b) f est continue sur l'intervalle $]1;+\infty[$ et $f([1;+\infty[) =]0;2]$, or $1 \in]0;2]$, donc d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $\beta \in [1;+\infty[$ tel que $f(\beta) = 1$, de plus, comme f est strictement monotone sur cet intervalle alors ce β est unique.

$f(4) \approx 1{,}19$ *puis* $f(5) \approx 1{,}043$ *puis* $f(6) \approx 0{,}93$ donc $5 \leq \beta \leq 6$ donc l'entier est 5

4) a) Voici l'algorithme après avoir tourné :

	1	2	3	4	5
a	0	0	0,25	0,375	0,4375
b	1	0,5	0,5	0,5	0,5
$b-a$	1	0,5	0,25	0,125	0,0625
m	0,5	0,25	0,375	0,4375	0,46875
$f(m)$	$1{,}22 > 1$	$-3{,}09 < 1$	$0{,}102 < 1$	$0{,}792 < 1$	

b) L'algorithme affiche un encadrement de $\propto$ à 10^{-1} près

c) *__Initialisation__* : affecter à a la valeur 5 et à b la valeur 6

__Traitement__ : tant que $b - a > 0{,}1$ affecter à m la valeur $\frac{1}{2}(a+b)$

Si $f(m) > 1$ affecter à a la valeur m

Sinon affecter à b la valeur m

Fin de Si

Fin de Tant que

__Sortie__ : Afficher a

Afficher b

5) a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow 2 + 2\ln(x) = 0$

$\Leftrightarrow \ln(x) = -1$

$\Leftrightarrow x = e^{-1}$ donc $E(e^{-1}; 0)$

L'aire du triangle curviligne $EAB = \int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)\,dx$ mais comme l'aire du rectangle $OABC = 2$ alors

Il faut donc prouver que $\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)\,dx = 1$

b) $\int_{\frac{1}{e}}^{1} \left(\frac{2}{x} + 2 \times \frac{\ln(x)}{x}\right) dx = \left[2\ln(x) + \frac{2\ln(x)}{2}\right]_{\frac{1}{e}}^{1} = -\left(2\ln\left(\frac{1}{e}\right) + 1\left(\ln\left(\frac{1}{e}\right)\right)^2\right)$

$= -(-2\ln(e) + 1(-\ln(e))^2) = 2 - 1 = 1$

CORRIGE DE L'EPREUVE DE MATHEMATIQUES
DU BACCALAUREAT
FILIERE SCIENTIFIQUE 2013

EXERCICE3 :

1) Soit A le point d'affixe i et B le point d'affixe-1. $z - i \;=\; z + 1 \;\; \Leftrightarrow AM = BM$
$\Leftrightarrow M$ $\in$médiatrice du segment AB donc $\boxed{la\ proposition\ \ 1\ est\ vraie}$

2) $\arg\ 1 + i\ \sqrt{3}\ ^4 = 4 \arg\ 1 + i\ \sqrt{3}\ = 4 \arg\ \ 2\ \ \frac{1}{2} + \frac{i\ \sqrt{3}}{2}\ \ = 4arg2 + 4 \arg\ \frac{1}{2} + \frac{i\ \sqrt{3}}{2}$

$= 4 \times 0 + 4 \arg\ \ e^{\frac{i\pi}{3}}\ \ 2\pi\ = \frac{4\pi}{3}\ 2\pi\ \neq 0\ \pi$ donc $z \notin\ \mathbb{R}$ donc
$\boxed{la\ proposition\ \ 2\ est\ fausse}$

3) Dans le repère (A, AB, AD, AE) on a $EC = EF + FG + GC = AB + AD - AE$

$$BG.EC = \ AD + AE\ .(AB + AD - AE)$$

$$AD.AB + AD^2 - AD.AE + AE.AB + AE.AD - AE^2 = 0$$

$$\boxed{la\ proposition\ \ 3\ est\ vraie}$$

4) Soit $n_P \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{matrix}$ vecteur normal au plan$P$ comme la droite est perpendiculaire au plan P alors ce vecteur est directeur de la droite. Cette droite passant par $S\ \ 1; -2; -2$ on a du coup :

$M(x; y; z) \in D(S, n_P) \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} :\ SM = tn_P \Leftrightarrow \begin{matrix} x - 1 = k \\ y + 2 = k \\ z + 2 = 3k \end{matrix} \Leftrightarrow \begin{matrix} x = k + 1 \\ y = k - 2 \\ z = 3k - 2 \end{matrix}$ on pose $k = t + 1$ et

on obtient : $\begin{matrix} x = t + 1 + 1 = 2 + t \\ y = t + 1 - 2 = -1 + t \\ z = 3\ \ t + 1\ \ - 2 = 1 + 3t \end{matrix}$ donc $\boxed{la\ proposition\ \ 4\ est\ vraie}$

EXERCICE 4 :

1)a) $u_1 = \frac{7}{3}$ $\quad u_2 = \frac{26}{9}$ $\quad u_3 = \frac{97}{27}$ $\quad u_4 = \frac{356}{81}$
b) La suite semble être croissante
2)a) Démontrons par récurrence que $u_n \leq n + 3$ pour tout $n \in \mathbb{N}$
Initialisation : $u_0 = 2 < 0 + 3$ donc c'est vérifié
Hypothèse de récurrence : à n fixé on suppose que $u_n \leq n + 3$
$u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 \leq \frac{2}{3}\ \ n + 3\ \ + \frac{1}{3}n + 1 = \frac{2}{3}n + \frac{1}{3}n + 2 + 1 = n + 3$
Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'assertion est vraie
b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 - u_n = -\frac{1}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1 = \frac{1}{3}\ \ n + 3 - u_n$
c) pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leq n + 3 \Leftrightarrow -u_n \geq -n - 3$

$$\Leftrightarrow n + 3 - u_n \geq n + 3 - n - 3$$

$$\Leftrightarrow u_{n+1} - u_n \geq 0$$ d'où $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croît.

3) a) pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\quad v_{n+1} - v_n = u_{n+1} -\ \ n + 1\ \ -\ \ u_n - n$
$\Leftrightarrow v_{n+1} - v_n = u_{n+1} - u_n - n - 1 + n$
$\Leftrightarrow v_{n+1} - v_n = \frac{1}{3}\ \ n + 3 - u_n\ \ - 1$
$\Leftrightarrow v_{n+1} - v_n = \frac{1}{3}n + 1 - \frac{u_n}{3} - 1$
$\Leftrightarrow v_{n+1} - v_n = \frac{1}{3}\ \ n - u_n\ \ = -\frac{1}{3}v_n$ d'où $v_{n+1} = -\frac{1}{3}v_n + v_n = \frac{2}{3}v_n$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \frac{2}{3}v_n$

donc $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 0 = 2$

donc l'expression de v_n en fonction de n donne : $v_n = 2 \times \frac{2}{3}^{n}$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $v_n = u_n - n \Leftrightarrow u_n = v_n + n = 2 \times \frac{2}{3}^{n} + n$

c) Comme $\frac{2}{3} < 1$ alors $lim\, v_n = 0$ comme limite d'une suite géométrique dont la raison est inférieure en valeur absolue à 1 et il vient que $lim\, u_n = +\infty$

4) a) $\sum_{k=0}^{k=n} u_k = \sum_{k=0}^{k=n} v_k + k$

$$= \sum_{k=0}^{k=n} v_k + \sum_{k=0}^{k=n} k$$

$$\underset{voir*}{=} 2 \times \frac{1-\frac{2}{3}^{n+1}}{1-\frac{2}{3}} + \frac{n}{2}\, n+1 = 6 \times\, 1 - \frac{2}{3}^{n+1} + \frac{n}{2}\, n+1$$

*Il s'agit de la somme des $n+1$ termes d'une suite géométrique dont la raison est différente de 1et dont le premier terme est deux, pour la première somme. Pour la seconde il s'agit de la somme des entiers naturels de 1 à n.

b) On a pour tout $\in \mathbb{N}$ $T_n = \frac{S_n}{n^2} = \frac{6\times\, 1-\frac{2}{3}^{n+1} + \frac{n}{2}\, n+1}{n^2} = 6 \times \frac{1-\frac{2}{3}^{n+1}}{n^2} + \frac{\frac{n}{2}\, n+1}{n^2}$

or $\lim 6 \times \frac{1-\frac{2}{3}^{n+1}}{n^2} = 0$ car $\lim \frac{6}{n^2} = 0$ et que $\lim 1 - \frac{2}{3}^{n+1} = 1$

et , en mettant les termes de plus haut degré en facteur on a $\lim \frac{\frac{n}{2}\, n+1}{n^2} = \frac{1}{2}$

On conclut donc que $\lim T_n = \frac{1}{2}$