EXERCICE 1 **5 points**

Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}\ ;\ \vec{i}\ ;\ \vec{j}\right)$.

On considère les points B (100 ; 100) et C $\left(50\ ;\ \dfrac{50}{\sqrt{\text{e}}}\right)$ et la droite (D) d'équation $y = x$.

On note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ dont la courbe représentative, notée Γ , est donnée en annexe.
On suppose de plus qu'il existe deux réels a et b tels que :

- pour tout x réel, $f(x) = x\text{e}^{ax+b}$.
- les points B et C appartiennent à la courbe Γ .

1. **a.** $\text{B}(100;100) \in \Gamma \iff 100 = f(100) \iff 100 = 100\text{e}^{100a+b} \iff 1 = \text{e}^{100a+b} \iff 0 = 100a+b$

$\text{C}\left(50\ ;\ \dfrac{50}{\sqrt{\text{e}}}\right) \iff \dfrac{50}{\sqrt{\text{e}}} = f(50) \iff \dfrac{50}{\sqrt{\text{e}}} = 50\text{e}^{50a+b} \iff \text{e}^{-\frac{1}{2}} = \text{e}^{50a+b} \iff 50a+b = -\dfrac{1}{2}$

Le couple $(a\ ;\ b)$ est donc solution du système : $\left\{\begin{array}{l} 100a+b = 0 \\ 50a+b = -\dfrac{1}{2}\end{array}\right.$

b. $\left\{\begin{array}{l} 100a+b = 0 \\ 50a+b = -\dfrac{1}{2}\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} 100a+b = 0 \\ 100a+2b = -1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} 100a+b = 0 \\ b = -1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} 100a = 1 \\ b = -1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} a = 0,01 \\ b = -1\end{array}\right.$

Donc, pour tout x réel, $f(x) = x\text{e}^{0,01x-1}$.

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} 0,01x-1 = +\infty$ et $\lim\limits_{y\to+\infty} \text{e}^y = +\infty$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} \text{e}^{0,01x-1} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

3. **a.** Pour tout x réel, $f(x) = x\text{e}^{0,01x-1} = 100 \times 0,01x\text{e}^{0,01x}\text{e}^{-1} = \dfrac{100}{\text{e}} \times 0,01x\text{e}^{0,01x}$

b. $\lim\limits_{x\to-\infty} 0,01x = -\infty$ et $\lim\limits_{y\to-\infty} y\text{e}^y = 0$ d'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$

4. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel on a :
$f'(x) = 1 \times \text{e}^{0,01x-1} + x \times 0,01\text{e}^{0,01x-1} = (1+0,01x)\text{e}^{0,01x-1}$.
Comme $\text{e}^{0,01x-1} > 0$ quel que soit le réel x, la dérivée a le signe du facteur $1+0,01x$.
Comme $1+0,01x > 0 \iff 0,01x > -1 \iff x > -100$, la fonction est croissante sur $[-100\ ;\ +\infty[$, décroissante ailleurs. D'où le tableeau de variations suivant :

5. Pour tout x réel on a : $f(x) - x = x\left(\text{e}^{0,01x-1} - 1\right)$.
Avec $\text{e}^{0,01x-1} - 1 \geqslant 0 \iff 0,01x-1 \geqslant 0 \iff x \geqslant 100$.
On a donc le tableau de signes suivants :

x	$-\infty$ 0	100	$+\infty$
x	$-$	$+$	$+$
$\text{e}^{0,01x-1}$	$-$	$-$ 0	$+$
$f(x)-x$	$+$	$-$	$+$

La courbe Γ est donc en dessous de la droite (D) sur $]0\ ;\ 100]$ et au dessus ailleurs.

6. **a.** Posons pour tout t réel ; $u(t) = x$ et $v'(t) = \mathrm{e}^{0,01t-1}$ on a alors $u'(t) = 1$ et $v(t) = 100\mathrm{e}^{0,01t-1}$. Les fonctions u, v, u' et v' sont continues sur $\mathbb{R}$ car dérivables sur $[0~;~100]$ d'où par intégration par parties on obtient :

$$\begin{aligned}\int_0^{100} f(t)\mathrm{d}\,t &= \left[t \times 100\mathrm{e}^{0,01t-1}\right]_0^{100} - \int_0^{100} 100\mathrm{e}^{0,01t-1}\mathrm{d}\,t \quad .\\ &= 10\,000\mathrm{e}^0 - 100 \times 0 \times \mathrm{e}^{-1} - \left[100^2\mathrm{e}^{0,01t-1}\right]_0^{100}\\ &= 10\,0000 - 10\,000\left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}}\right)\\ &= \frac{10\,000}{\mathrm{e}}\end{aligned}$$

b. La courbe Γ est donc en dessous de la droite (D) sur $[0;100]$ donc on a

$$\begin{aligned}\mathrm{A} &= \int_0^{100} t - f(t)\mathrm{d}\,t\\ &= \int_0^{100} t\mathrm{d}\,t - \int_0^{100} f(t)\mathrm{d}\,t\\ &= \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{100} - \frac{9900}{\mathrm{e}}\\ &= 5000 - \frac{10\,000}{\mathrm{e}}\\ &\simeq 1\,321\end{aligned}$$

EXERCICE 2 **5 points**

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = -2+2\text{i}$, $b = -3-6\text{i}$ et $c = 1$.

La figure de l'exercice est donnée en annexe. Elle peut servir à émettre des conjectures, à vérifier des résultats.

1. Le triangle ABC semble rectangle en C.
$\left(\overrightarrow{\text{CA}}, \overrightarrow{\text{CB}}\right) = \arg\left(\dfrac{-3-6\text{i}-1}{-2+2\text{i}-1}\right) = \arg\left(\dfrac{-4-6\text{i}}{-3+2\text{i}}\right) = \arg\left(\dfrac{2\text{i}(2\text{i}-3)}{-3+2\text{i}}\right) = \arg(2\text{i}) = \dfrac{\pi}{2}$
Le triangle ABC est donc bien rectangle en C.

2. **a.** L'écriture complexe de la rotation r de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ est :

$z' - (-3-6\text{i}) = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{2}}(z+3+6\text{i}) \iff z' = \text{i}z + 3\text{i} - 6 + (-3-6\text{i}) \iff z' = \text{i}z - 9 - 3\text{i}.$

b. L'affixe du point A′ image de A par r est $a' = \text{i}(-2+2\text{i}) - 9 - 3\text{i} = -11-5\text{i}$

c. L'affixe s du point S milieu de [AA′] est $s = \dfrac{a+a'}{2} = \dfrac{-2+2\text{i}-11-5\text{i}}{2} = -\dfrac{13}{2} - \dfrac{3}{2}\text{i}.$

d. Le triangle ABC étant rectangle en C le centre de son cercle circonscrit est Ω le milieu de [AB] qui a pour affixe $-\dfrac{5}{2} - 2\text{i}$. Son rayon est $\Omega\text{A} = \left|-2+2\text{i} - \left(-\dfrac{5}{2} - 2\text{i}\right)\right| = \left|\dfrac{1}{2} + 4\text{i}\right| = \dfrac{\sqrt{65}}{2}$

Or $\Omega\text{S} = \left|-\dfrac{13}{2} - \dfrac{3}{2}\text{i} - \left(-\dfrac{5}{2} - 2\text{i}\right)\right| = \left|-\dfrac{8}{2} + \dfrac{1}{2}\text{i}\right| = \dfrac{\sqrt{65}}{2}$ donc S est bien sur le cercle circonscrit au triangle ABC.

3. On construit de la même manière C′ l'image de C par la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, Q le milieu de [CC′], B′ l'image de B par la rotation de centre C et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ et P le milieu de [BB′].
On admet que les affixes respectives de Q et de P sont $q = \dfrac{1}{2} + \dfrac{5}{2}\text{i}$ et $p = 2-5\text{i}$.

a. Démontrer que $\dfrac{s-q}{p-a} = \dfrac{-\frac{13}{2} - \frac{3}{2}\text{i} - \frac{1}{2} - \frac{5}{2}\text{i}}{2-5\text{i}+2-2\text{i}} = \dfrac{-7-4\text{i}}{4-7\text{i}} = \dfrac{-4\text{i}+7\text{i}^2}{4-7\text{i}} = -\text{i}.$

b. On a donc $\left(\overrightarrow{\text{AP}}\,;\overrightarrow{\text{QS}}\right) = \arg(-\text{i}) = -\dfrac{\pi}{2}$. Les droites (AP) et (QS) sont donc perpendiculaires.

De plus $\left|\dfrac{s-q}{p-a}\right| = \dfrac{\text{QS}}{\text{AP}} = |-\text{i}| = 1$ donc que les segments [AP] et [QS] sont de même longueur.

4. $\dfrac{p-s}{q-b} = \dfrac{2-5\text{i}+\frac{13}{2}+\frac{3}{2}\text{i}}{\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\text{i}+3+6\text{i}} = \dfrac{\frac{17}{2}-\frac{7}{2}\text{i}}{\frac{7}{2}+\frac{17}{2}\text{i}} = -\text{i}.$
On a donc $\left(\overrightarrow{\text{BQ}}\,;\overrightarrow{\text{SP}}\right) = \arg(-\text{i}) = -\dfrac{\pi}{2}$. Les droites (BQ) et (SP) sont donc perpendiculaires.
On montre de même que les droites (CS) et (PQ) sont perpendiculaires.
Les droites (AP), (BQ) et (CS) sont donc les trois hauteurs du triangle PQS donc sont concourantes

EXERCICE 3 **5 points**

PARTIE A.

Lorsque N = 3 l'algorithme effectue trois boucles avant de s'arrêter. À la fin de la boucle pour $k = 0$ on a U = 3 ; à la fin de la boucle $k = 1$ on a U = 10 et à la fin de la boucle correspondant à $k = 2$ on obtient U = 29.
L'affichage en sortie est donc 29.

PARTIE B.

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$.

1. $u_1 = 3$ et $u_2 = 10$.

2. **a.** Démontrons par récurrence, pour tout entier naturel n, la propriété P_n : $u_n \geqslant n$.
- $u_0 = 0 \geqslant 0$ donc la propriété P_0 est vérifiée.
- Supposons la propriété P_n vraie pour une valeur de n fixée.
  $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3 \geqslant 3n - 2n + 3 \geqslant n + 3 \geqslant n + 1$ la propriété est donc alors vérifiée au rang $n + 1$.
- Conclusion : D'après la propriété de récurrence on en déduit que pour tout entier naturel n, $u_n \geqslant n$.

b. d'après le théorème de comparaison $\lim (u_n) = +\infty$.

3. Pour tout entier naturel n ; $u_{n+1} - u_n = 3u_n - 2n + 3 - u_n = 2u_n - 2n + 3 \geqslant 3 \geqslant 0$ donc la suite (u_n) est croissante.

4. Soit la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = u_n - n + 1$.

a. Pour tout entier naturel n $v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) + 1 = 3u_n - 2n + 3 - n - 1 + 1 = 3(u_n - n + 1) = 3v_n$.
La suite (v_n) est une suite géométrique de premier terme $v_0 = 1$ et de raison 3.

b. Pour tout entier naturel n, $v_n = 3^n$ et $u_n = v_n + n - 1$ donc $u_n = 3^n + n - 1$.

5. Soit p un entier naturel non nul.

a. La suite (u_n) tend vers $+\infty$ donc on peut affirmer qu'il existe au moins un entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, $u_n \geqslant 10^p$.

b. $u_{3p} = 3^{3p} + 3p - 1 = 27^p + 3p - 1 \geqslant 27^p \geqslant 10^p$ donc $n = 3p$ est une valeur de n telle que $u_n \geqslant 10^p$; n_0 étant la plus petite de ces valeurs, on a donc $n_0 \leqslant 3p$

c. $u_6 = 734$ et $u_7 = 2193$ donc pour la valeur $p = 3$; $n_0 = 7$.

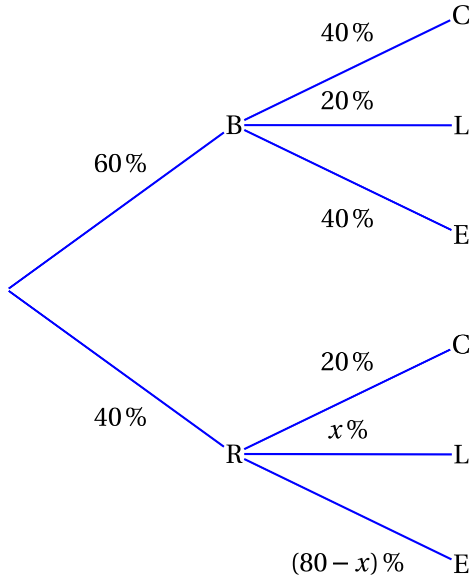
d. Algorithme qui, pour une valeur de p donnée en entrée, affiche en sortie la valeur du plus petit entier n_0 tel que, pour tout $n \geqslant n_0$, on ait $u_n \geqslant 10^p$.

Entrée
Saisir le nombre entier naturel non nul p.
Traitement
Affecter à U la valeur 0
Affecter à k la valeur 0
Tant que U < 10^p
Affecter à U la valeur 3U $- 2k + 3$
Affecter à k la valeur $k + 1$
Fin tant que
Sortie
Afficher k

EXERCICE 4 **5 points**

Si on note les événements :
B : « le cube est bleu »
R : « le cube est rouge »
c : « le cube a ses faces marquées d'un cercle »
L : « le cube a ses faces marqués d'un losange »
E : « le cube a ses faces marquées d'une étoile ».

On a l'arbre suivant :



PARTIE A. expérience 1

1. La probabilité que soit tiré un cube marqué d'un losange est égale à :
$60\,\% \times 20\,\% + 40\,\% \times x\,\% = 0,6 \times 0,2 + 0,4 \times \dfrac{x}{100} = 0,12 + 0,004x$.

2. Notons P(L) la probabilité de tirer un cube marqué d'un losange et P(E) celle de tirer un cube marqué d'une étoile.

$$\begin{aligned}\mathrm{P(L)} = \mathrm{P(E)} &\iff 0,12 + 0,004x = 0,6 \times 0,4 + 0,4 \times \dfrac{80-x}{100}\\ &\iff 0,12 + 0,004x = 0,24 + 0,32 - 0,004x\\ &\iff 0,008x = 0,44\\ &\iff x = 55\end{aligned}$$

La probabilité de tirer un cube marqué d'un losange est égale à celle de tirer un cube marqué d'une étoile pour $x = 55$.

3. Les évènements « tirer un cube bleu » et « tirer un cube marqué d'un losange » sont indépendants équivaut à $\mathrm{P_B(L)} = \mathrm{P(L)} = \mathrm{P_R(L)}$ soit pour $x = 20$.

4. Dans cette question que $x = 50$. $\mathrm{P_L(B)} = \dfrac{\mathrm{P(L \cap B)}}{\mathrm{P(L)}} = \dfrac{0,6 \times 0,2}{0,12 + 0,004 \times 50} = \dfrac{0,12}{0,32} = 0,375$
La probabilité que soit tiré un cube bleu sachant qu'il est marqué d'un losange est donc 0,375.

PARTIE B. expérience 2

1. La probabilité de ne tirer aucun cube rouge est :

$$\frac{\binom{60}{3}}{\binom{100}{3}} = \frac{\dfrac{60!}{57!3!}}{\dfrac{100!}{97!3!}} = \frac{60 \times 59 \times 58}{100 \times 99 \times 98} = \frac{3 \times 20 \times 59 \times 2 \times 29}{5 \times 20 \times 3 \times 3 \times 11 \times 2 \times 49} = \frac{1711}{8085} \simeq 0,212$$

La probabilité de tirer au moins un cube rouge est donc $1 - \dfrac{1711}{8085} = \dfrac{6374}{8085} \simeq 0,788$.

2. D'après les calculs précédents la probabilité que les trois cubes soient bleus est $\dfrac{1711}{8085}$.
La probabilité que les trois cubes soient rouges est :

$$\frac{\binom{40}{3}}{\binom{100}{3}} = \frac{\dfrac{40!}{37!3!}}{\dfrac{100!}{97!3!}} = \frac{40 \times 39 \times 38}{100 \times 99 \times 98} = \frac{2 \times 20 \times 3 \times 13 \times 2 \times 19}{5 \times 20 \times 3 \times 3 \times 11 \times 2 \times 49} = \frac{494}{8085} \simeq 0,061.$$

La probabilité que les cubes tirés soient de la même couleur est donc $\dfrac{1711}{8085} + \dfrac{494}{8085} = \dfrac{2205}{8085} \simeq 0,273$

3. Il y a 32 cubes marqués d'un cercle donc la probabilité d'avoir tiré exactement un cube marqué d'un cercle est
$$\frac{\binom{32}{1} \times \binom{68}{2}}{\binom{100}{3}} = \frac{32 \times 68 \times 67}{100 \times 99 \times 98} = \frac{2^7 \times 17 \times 67}{2^3 \times 3^2 \times 5^2 \times 7^2 \times 11} = \frac{72896}{161700} \simeq 0,451.$$
La probabilité de tirer exactement un cube marqué d'un cercle est environ 0,451.

Exercice 5 Spécialité **5 points**

PARTIE A.

On considère l'équation (E) : $25x - 108y = 1$ où x et y sont des entiers relatifs.

1. $25 \times 13 - 108 \times 3 = 325 - 224 = 1$, le couple (13 ; 3) est bien solution de l'équation $25x - 108y = 1$.
2. $(x_0; y_0) = (13\ ;\ 3)$ est une solution particulière de l'équation (E).
   $(x\ ;\ y)$ est solution de (E) équivaut à $25(x - x_0) = 108(y - y_0)$ avec 25 et 108 premier entre eux donc 108 divise $x - x_0$
   On a donc $x - x_0 = 108k$ avec k entier relatif d'où alors $y - y_0 = 25k$.
   L'ensemble des couples d'entiers relatifs solutions de l'équation (E) est $\left\{(13 + 108k\ ;\ 3 + 25k) \diagup k \in \mathbb{Z}\right\}$.

PARTIE B.

Dans cette partie, a désigne un entier naturel et les nombres c et g sont des entiers naturels vérifiant la relation $25g - 108c = 1$.

1. Soit x un entier naturel.
   Si $x \equiv a$ [7] alors $x - a$ est divisible par 7. De même $x \equiv a$ [19] entraîne $x - a$ divisible par 19.
   Or 7 et 19 sont premiers entre eux donc $x - a$ divisible par $7 \times 19 = 133$. Ce qui s'écrit encore $x \equiv a$ [133].
   Donc si $x \equiv a$ [7] et $x \equiv a$ [19], alors $x \equiv a$ [133].
2. **a.** On suppose que a n'est pas un multiple de 7.
   7 est premier et a n'est pas un multiple de 7 donc d'après le petit théorème de Fermat on a $a^6 \equiv 1$ [7].
   De plus $108 = 6 \times 18$ donc $a^{108} = \left(a^6\right)^{18} \equiv 1^{18}$ [7] $\equiv 1$ [7].
   On a donc $\left(a^{25}\right)^g = a^{25g} = a^{1+108c} a \times \left(a^{108}\right)^c \equiv a \times 1^c$ [7] $\equiv a$ [7].

   b. On suppose que a est un multiple de 7.
   On a alors $a \equiv 0$ [7] et $a^{25g} = \left(a^{25}\right)^g \equiv 0$ (7] donc $\left(a^{25}\right)^g \equiv a$ [7].

   c. On admet que pour tout entier naturel a, $\left(a^{25}\right)^g \equiv a$ [19].
   D'après les questions a. et b. on sait que l'on a aussi $\left(a^{25}\right)^g \equiv a$ [7] on peut donc en appliquant le résultat de la question 1. à $x = \left(a^2 5\right)^g$ démontrer que $\left(a^{25}\right)^g \equiv a$ [133].

PARTIE C.

On note A l'ensemble des entiers naturels a tels que : $1 \leqslant a \leqslant 26$.
Un message, constitué d'entiers appartenant à A, est codé puis décodé.
La phase de codage consiste à associer, à chaque entier a de A, l'entier r tel que $a^{25} \equiv r$ [133] avec $0 \leqslant r < 133$.
La phase de décodage consiste à associer à r , l'entier r_1 tel que $r^{13} \equiv r_1$ [133] avec $0 \leqslant r_1 < 133$.

1. $r_1 \equiv r^{13}$ [133] $\equiv \left(a^{25}\right)^{13}$ [133] avec $(g\ ,\ c) = (13\ ;\ 3)$ vérifiant la relation $25g - 108c = 1$ d'après la partie A.
   D'où d'après la question 2.c. de la partie B, $\left(a^{25}\right)^{13}$ [133] $\equiv a$ [133] donc finallement on bien $r_1 \equiv a$ [133].
2. $128 \equiv -5$ [133] donc $128^{13} \equiv -5^{13}$ [133] $\equiv -131$ [133] $\equiv 2$ [133]
   $59^4 \equiv 130$ [133] $\equiv -3$ [133] donc $59^{13} = \left(59^4\right)^3 \times 59 \equiv -3^3 \times 59$ [133] $\equiv -130$ [133] $\equiv 3$ [133]
   Le message initiale était donc : 2 3.