ELEMENTS DE CORRECTION DE L'EPREUVE DE MATHEMATIQUES (SERIE S)

Exercice 1 :

Partie A

1. a) Les données de l'énoncé permettent de donner directement :

$P(V) = 0{,}02$; $P_V(T) = 0{,}99$; $P_{\overline{V}}\left(\overline{T}\right) = 0{,}97.$

b) $P\left(V \cap T\right) = P_V(T) \times P(V) = 0{,}0198.$

2. La formule des probabilités totales donne :

$$P\left(T\right) = P_V\left(T\right) \times P(V) + P_{\overline{V}}(T) \times P\left(\overline{V}\right) = 0{,}99 \times 0{,}02 + (1-0{,}97) \times (1-0{,}02) = 0{,}0492.$$

3.a) $P_T(V) = \dfrac{P\left(T \cap V\right)}{P(T)} \simeq 0{,}4024.$

b) $P_{\overline{T}}\left(\overline{V}\right) = \dfrac{P\left(\overline{T} \cap \overline{V}\right)}{P\left(\overline{T}\right)} = \dfrac{P_{\overline{V}}\left(\overline{T}\right) \times P\left(\overline{V}\right)}{1 - P(T)} \simeq 0{,}9998.$

Partie B

1. A une personne choisie au hasard, on associe deux « issues » : soit la personne est contaminée (avec un probabilité $P(V) = 0{,}02$), soit elle ne l'est pas. On a donc une expérience de Bernoulli. On répète <u>indépendamment</u> cette expérience 10 fois. On a donc un schéma de 10 épreuves de Bernoulli.
La variable aléatoire X compte le nombre de personne contaminées.
X suit donc une loi binomiale de paramètres 10 et 0,02.

2. $P(X \geq 2) = 1 - P(X=0) - P(X=1) = 1 - 0{,}98^{10} - 10 \times 0{,}02 \times 0{,}98^{9} \simeq 0{,}0162.$

Exercice 2 : (NB : on ne demandait pas de justifier)

1. $z_E = z_A + e^{i\frac{\pi}{3}}\left(z_D - z_A\right) = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\left(1-i\right).$

2. M d'affixe z est tel que $|z + i| = |z - 1|$ si et seulement si DM = AM. L'ensemble est donc la médiatrice du segment [AD].

3. M d'affixe z est tel que $\dfrac{z+i}{z+1}$ est un imaginaire pur si et seulement si :

M et D sont confondus, ou M n'est pas confondu ni avec C ni avec D et : $\left(\overrightarrow{MC};\overrightarrow{MD}\right) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ (où $k \in \mathbb{Z}$).

L'ensemble est donc le cercle de diamètre [CD] privé du point C.

4. M d'affixe z est tel que $\arg\left(z - i\right) = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ (où $k \in \mathbb{Z}$) si et seulement si $\left(\overrightarrow{u};\overrightarrow{BM}\right) = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ (où $k \in \mathbb{Z}$).

L'ensemble est donc la demi droite]BD) d'origine B, passant par D et privée du point B (car sinon z – i = 0 et on ne peut pas considérer l'argument).

Exercice 3 :

Partie A

1.a) $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-x} = -\infty \left(\text{car } \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty\right)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$ (il s'agit d'une croissance comparée).

b) La fonction f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables.
Pour tout réel x, $f_1'(x) = e^{-x} - x\,e^{-x} = (1 - x)\,e^{-x}$.
La fonction exponentielle étant strictement positive sur $\mathbb{R}$, $f_1'(x)$ est du signe de $(1 - x)$.
On en déduit les variations de f_1 et son tableau de variations :

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f_1'(x)$		+	0	−	
f_1	$-\infty$	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	0

c) La courbe représentant $\mathscr{C}_k$ ne correspond pas au tableau ci-dessus, on n'a donc pas k = 1.
Comme k désigne un entier naturel non nul, il est supérieur ou égal à 2.

2. a) Pour tout entier naturel n non nul, $f_n(0) = 0$. On en déduit que les courbes $\mathscr{C}_n$ passent toutes par O. On a également pour tout entier naturel n non nul, $f_n(1) = e^{-1}$. On en déduit que les courbes $\mathscr{C}_n$ passent toutes par le point de coordonnées $(1 ; e^{-1})$.

b) Pour tout entier naturel n non nul f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables et pour tout réel x : $f_n'(x) = n\,x^{n-1}\,e^{-x} - x^n\,e^{-x} = x^{n-1}\,(n - x)\,e^{-x}$.

3. Pour tout réel x on a : $f_3'(x) = x^2\,(3 - x)\,e^{-x}$.
Pour tout réel x, $x^2\,e^{-x} \geqslant 0$, on a donc $f_3'(x) \geqslant 0$ si et seulement si $3 \geqslant x$. Ainsi f_3 admet bien un maximum en 3.

4. a) L'équation de T_k est : $y = f_k'(1)\,(x - 1) + f_k(1)$.
La droite T_k coupe donc l'axe des abscisses lorsque $f_k'(1)\,(x - 1) + f_k(1) = 0$, ce qui équivaut à: $(k - 1)\,e^{-1}\,(x - 1) + e^{-1} = 0$, donc (puisque $e^{-1} \neq 0$) pour $x = \dfrac{k-2}{k-1}$.

b) On déduit de ce qui précède et des données de l'énoncé que $\dfrac{k-2}{k-1} = \dfrac{4}{5}$, donc k = 6.

Partie B

1. On calcule I_1 à l'aide d'une intégration par parties, en dérivant le polynôme et intégrant l'exponentielle : $I_1 = \int_0^1 xe^{-x}dx = \left[-xe^{-x}\right]_0^1 - \int_0^1 -e^{-x}dx = -e^{-1} - \left[e^{-x}\right]_0^1 = -2e^{-1} + 1.$

2. a) Pour tout entier naturel non nul n, f_n est positive sur [0 ; 1]. On peut donc interpréter géométriquement I_n comme l'aire délimitée par la courbe $\mathscr{C}_n$, l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 0 et x = 1.
Les représentations données permettent de conjecturer le fait que la suite (I_n) est décroissante.

b) Soit n un entier naturel non nul. $I_{n+1} - I_n = \int_0^1 x^{n+1}e^{-x}dx - \int_0^1 x^n e^{-x}dx = \int_0^1 x^n e^{-x}(x-1)dx.$

Sur l'intervalle [0 ; 1], $x^n e^{-x}(x-1) \leqslant 0$, on en déduit que $I_{n+1} - I_n \leqslant 0$, ce qui démontre le fait que la suite (I_n) est décroissante.

c) Pour tout entier naturel n non nul et tout réel x de [0 ; 1], $f_n(x) \geqslant 0$, donc par positivité de l'intégrale, pour tout entier naturel n non nul $I_n \geqslant 0$.
La suite (I_n) est décroissante, minorée par 0 elle est donc convergente.

d) La fonction exponentielle étant croissante sur [0 ; 1], pour tout entier naturel n non nul, et tout réel x de [0 ; 1], $0 \leqslant f_n(x) \leqslant x^n$, donc par passage à l'intégrale :

$$0 \le I_n \le \int_0^1 x^n dx \quad \text{donc} \quad 0 \le I_n \le \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1 \quad \text{d'où : } 0 \le I_n \le \frac{1}{n+1}.$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, le théorème des gendarmes donne : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

<u>Exercice 4 :</u> (ENSEIGNEMENT OBLIGATOIRE)

Partie A

1. H étant le projeté orthogonal de M_0 sur le plan, les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{M_0H}$ sont colinéaires donc :
$\left|\vec{n}.\overrightarrow{M_0H}\right| = \left\|\vec{n}\right\| \cdot M_0H = M_0H\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

2. On note $(\alpha ; \beta ; \gamma)$ les coordonnées de H. La forme analytique du produit scalaire donne :
$\vec{n}.\overrightarrow{M_0H} = a(\alpha - x_0) + b(\beta - y_0) + c(\gamma - z_0) = -ax_0 - by_0 - cz_0 + (a\alpha + b\beta + c\gamma)$.
Comme H est un point du plan, on a : $a\alpha + b\beta + c\gamma = -d$, d'où $\vec{n}.\overrightarrow{M_0H} = -ax_0 - by_0 - cz_0 - d$.

3. On déduit de ce qui précède que :

$$M_0H\sqrt{a^2+b^2+c^2} = \left|-ax_0 - by_0 - cz_0 - d\right| \text{ d'où } d(M_0;\wp) = M_0H = \frac{\left|ax_0+by_0+cz_0+d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}.$$

Partie B

1. a) $\overrightarrow{AB}(-7;1;-5)$; $\overrightarrow{AC}(-3;2;1)$. Les coordonnées de ces vecteurs n'étant pas proportionnelles, les vecteurs ne sont pas colinéaires, les points A, B et C définissent donc un plan. Les coordonnées des points A, B et C vérifient l'équation $x + 2y - z - 1 = 0$ qui est l'équation cartésienne d'un plan. On en déduit qu'il s'agit d'une équation du plan (ABC).

<u>Remarque</u> : on peut aussi retrouver cette équation en recherchant un vecteur normal orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ (ou en vérifiant que le vecteur de coordonnées (1 ; 2 ; -1) est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$) et en utilisant un des points A, B ou C pour trouver la constante.

b) $d = \frac{\left|-7-4-1\right|}{\sqrt{1+4+1}} = 2\sqrt{6}$.

2. a) Δ est perpendiculaire au plan, elle est donc dirigée par le vecteur $\vec{n}(1;2;-1)$.

Une équation de Δ est : $\begin{cases} x=-7+t \\ y=2t \qquad t\in\mathbb{R}. \\ z=4-t \end{cases}$

b) H est le point d'intersection de Δ et du plan. Ses coordonnées vérifient donc :

$$\begin{cases} x=-7+t \\ y=2t \\ z=4-t \\ x+2y-z-1=0 \end{cases} t\in\mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-7+t \\ y=2t \\ z=4-t \\ -7-4-1+6t=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-5 \\ y=4 \\ z=2 \end{cases}$$

c) On a: d = FH = $\sqrt{(-7+5)^2+4^2+(4-2)^2}=2\sqrt{6}$.

3. a) L'équation de $\mathcal{S}$ est : $(x + 7)^2 + y^2 + (z - 4)^2 = 36$.
Les coordonnées de B vérifient cette équation, B est donc un point de $\mathcal{S}$.

b) Le centre du cercle d'intersection est le projeté orthogonal de F sur le plan $\mathcal{P}$, c'est donc H. Le point B étant sur le cercle recherché, on trouve le rayon en appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle FBH : BH = $\sqrt{FB^2-FH^2}=\sqrt{36-(2\sqrt{6})^2}=2\sqrt{3}$.

<u>Exercice 4 :</u> (ENSEIGNEMENT DE SPECIALITE)

Partie A

1. Soient a, b et c des entiers relatifs tels que a divise bc, et a et b premiers entre eux.
a divise bc donc il existe un entier relatif k tel que $bc = ka$.
a et b sont premiers entre eux, donc d'après le théorème de BEZOUT, il existe deux entiers relatifs u et v tels que $au + bv = 1$.
On a donc : $auc + bvc = c$ d'où : $auc + kav = c$. On en déduit que $a(uc + kv) = c$ et par suite que a divise c.

2. Si $a \equiv 0\ [p]$ et $a \equiv 0\ [q]$ alors il existe deux entiers relatifs k et t tel que $a = kp = tq$.
On déduit de l'égalité précédente que p divise tq. Comme p et q sont premiers entre eux, on déduit du théorème de GAUSS que p divise t. Ainsi, il existe un entier relatif u tel que $t = pu$.
On a donc : $a = pqu$ d'où : $a \equiv 0\ [pq]$.

Partie B

1. a) 17 et 5 sont premiers entre eux, donc d'après le théorème de BEZOUT, il existe deux entiers u et v tels que $17u + 5v = 1$.

b) On a : $3\times17u = 3 - 3\times5v$ d'où $n_0 = 3 - 3\times5v + 9\times5v$ on a donc $n_0 \equiv 3\ [5]$.
De plus $9\times5v = 9 - 9\times17u$ d'où $n_0 = 9 - 9\times17u + 3\times17u$ on a donc $n_0 \equiv 9\ [17]$.
On a donc bien n_0 dans $\mathcal{S}$.

c) Le couple (-2 ; 7) vérifie $17\times(-2) + 5\times7 = 1$. On peut donc prendre $n_0 = 213$.

2. a) n et n_0 appartiennent à $\mathfrak{S}$, donc on a : $n - n_0 \equiv 0\ [17]$ et $n - n_0 \equiv 0\ [5]$.
17 et 5 étant premiers entre eux, d'après la **partie A** on a que $n - n_0 \equiv 0\ [17 \times 5]$, c'est-à-dire $n - n_0 \equiv 0\ [85]$.

b) Attention : il faut montrer une EQUIVALENCE.
On a montré dans la question précédente que si n appartient à $\mathfrak{S}$ alors $n - n_0 \equiv 0\ [85]$, donc il existe un entier relatif t tel que $n = n_0 + 85t = 213 + 85t = 43 + 2\times 85 + 85t$.
Donc si n appartient à $\mathfrak{S}$ alors il existe un entier relatif k tel que $n = 43 + 85k$ ($k = 2 + t$).
Réciproquement, s'il existe un entier relatif k tel que $n = 43 + 85\,k$, alors $n \equiv 43\ [5]$ donc $n \equiv 3\ [5]$, et $n \equiv 43\ [17]$ donc $n \equiv 9\ [17]$. Ainsi n appartient à $\mathfrak{S}$.

3. Soit n le nombre de jetons de Zoé. L'énoncé donne :
$300 \leqslant n \leqslant 400$; $n \equiv 9\ [17]$; $n \equiv 3\ [5]$. n est un élément de $\mathfrak{S}$.
Les résultats précédents donnent qu'il existe un entier k tel que $n = 43 + 85k$.
Comme $300 \leqslant n \leqslant 400$, on trouve : $k = 4$. Zoé a donc 383 jetons.