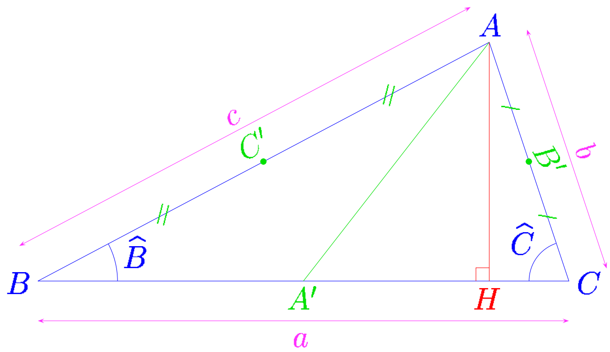
Relations métriques dans un triangle rectangle. Trigonométrie. Applications.

Pré-requis:
- ◇ La connaissance de la structure d'espace affine (Calcul de vecteurs).
- ◇ La notion d'angle géométrique (En particulier, la somme d'angles géométriques, la mesure d'angle géométrique).
- ◇ Le théorème de Thalès.
- ◇ Définitions d'une droite, d'un triangle.
- ◇ La somme des angles géométriques d'un triangle vaut π.

Notation:



Nous noterons également, $AH = h$, $BH = \alpha$ et $HC = \beta$.

Cadre: On se place dans un plan affine euclidien orienté $\mathcal{P}$ de sorte que le triangle ABC soit direct.

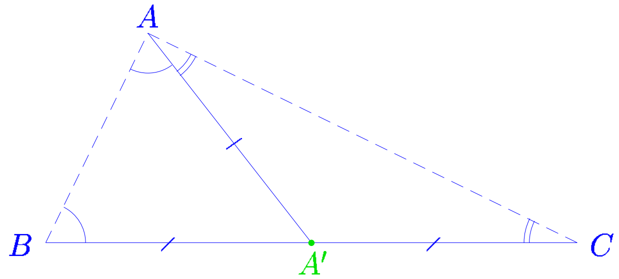
0.1 Relations métriques.

Définition 0.1.1.
Un triangle ABC est dit rectangle en A si $\widehat{A}$ est droit. Le côté $[BC]$ est alors appelé l'hypoténuse.

Voyons tout d'abord quelques caractérisations du triangle rectangle:

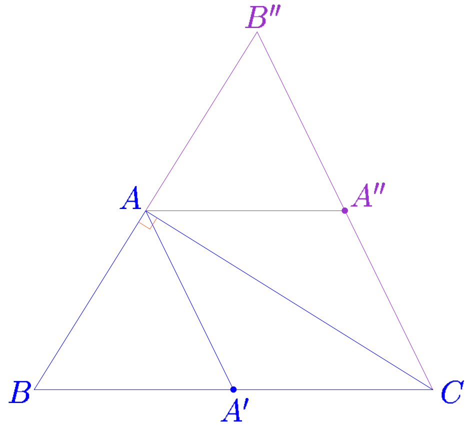
Proposition 0.1.2.
Le triangle ABC est rectangle en A si, et seulement si $AA' = \frac{BC}{2}$.

Démonstration. Supposons que $AA' = \frac{BC}{2}$,



Le triangle ABA' est isocèle en B, ainsi $\widehat{A'AB} = \widehat{B}$ et $AA'C$ est isocèle en A', d'où $\widehat{CAA'} = \widehat{C}$. Donc $\widehat{A} = \widehat{B} + \widehat{C}$. Or $\widehat{A} + \widehat{B} + \widehat{C} = \pi$ donc $2\left(\widehat{B} + \widehat{C}\right) = \pi$ d'où le résultat.

Supposons que ABC est rectangle en A et considérons le triangle symétrique de ABC par rapport à (AC).



Comme $\widehat{BAC} + \widehat{CAB''} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$, $A \in (BB'')$. Dans le triangle $B''BC$, A est le milieu de $[BB'']$ et A'' est le milieu de $[CB'']$, d'après le théorème de Thalès, $AA'' = \frac{BC}{2}$ or la symétrie conservant les distances, $AA'' = AA'$ d'où le résultat. ■

Conséquence: Le triangle ABC est rectangle en A si, et seulement si A appartient au cercle de diamètre $[BC]$.

Théorème 0.1.3.

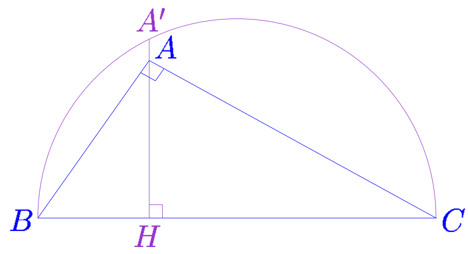
Les propriétés suivantes sont équivalentes:

1. Le triangle ABC est rectangle en A,
2. $h \cdot a = c \cdot b$, $b^2 = \beta \cdot a$, $c^2 = \alpha \cdot a$ et $h^2 = \alpha \cdot \beta$,
3. $a^2 = b^2 + c^2$.

Démonstration. 1. $\Rightarrow$ 2. Il suffit de remarquer que le triangle ABC est semblable à AHC (car $\widehat{ABC} = \widehat{AHC}$ et $\widehat{BCA} = \widehat{HCA}$), ainsi $\frac{b}{h} = \frac{c}{\alpha} = \frac{a}{c}$, d'où les deux premières égalités. On remarque de même que le triangle ABC est semblable à BHA pour obtenir la troisième égalité.
La dernière égalité en regroupant les informations des trois premières égalités; $h^2a^2 = c^2b^2 = \alpha\beta a^2$.
Pour obtenir la première égalité, on peut aussi calculer de deux manière différentes l'aire du triangle ABC. En prenant AB pour base, AC sera une hauteur (car ABC est rectangle en A) et $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{cb}{2}$. En prenant BC pour base, AH sera la hauteur et $\mathcal{A}_{ABC} = \frac{ah}{2}$, d'où le résultat.

2. $\Rightarrow$ 3. Par hypothèse, $b^2 + c^2 = a(\alpha + \beta) = a^2$.

3. $\Rightarrow$ 1. Soit $\mathcal{C}$ cercle de diamètre $[BC]$ et A' l'intersection de (AH) et $\mathcal{C}$ dans le même demi-plan délimité par (BC) que A.



Le point A' appartient au cercle de diamètre $[BC]$, donc le triangle $A'BC$ est rectangle en A' d'où $BC^2 = A'B^2 + A'C^2$ (car 1. $\Rightarrow$ 3.). Par hypothèse, $BC^2 = AB^2 + AC^2$ et par conséquent $AB^2 + AC^2 = A'B^2 + A'C^2$. L'implication 1. $\Rightarrow$ 3. appliquée dans les quatre triangles rectangles en H donnent alors

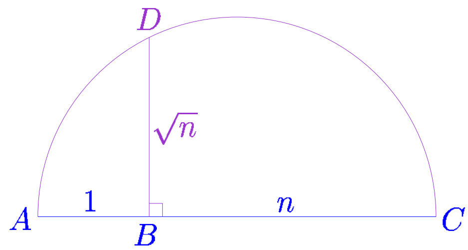
$$\left(AH^2 + HB^2\right) + \left(AH^2 + HC^2\right) = \left(A'H^2 + HB^2\right) + \left(A'H^2 + HC^2\right)$$

c'est-à-dire $AH^2 = A'H^2$ et comme A et A' sont dans le même demi-plan et que H appartient à la frontière de ce demi-plan, $\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{A'H}$ donc $A = A'$.

■

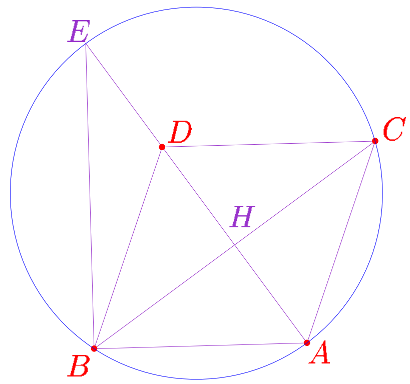
Remarques:

- L'implication 1. $\Rightarrow$ 3. est souvent appelé le théorème de Pythagore.
- La dernière égalité du 2. nous donne un procédé de construction de $\sqrt{n}$:



Exercice (Problème de Napoléon): Construisez le centre d'un cercle au compas seul.

Démonstration. Soit $\mathcal{C}$ un cercle de rayon R dont on ne connait pas le centre.



Soit A un point de $\mathcal{C}$, on peut construire au compas deux points B et C de $\mathcal{C}$ tels que $AB = AC = \rho$ et un point D distinct de A tel que $BD = CD = \rho$, où ρ est une longueur arbitraire suffisamment petite pour que B et C existent, de sorte que $ABCD$ est un losange dont on note H le centre (inconnu). Si E est le point (inconnu) diamétralement opposé à A, on a la relation $AH \cdot AE = AB^2$ dans le triangle rectangle ABE; on en déduit que

$$AD = 2AH = 2\frac{AB^2}{AE} = \frac{\rho^2}{R}.$$

On trace alors un cercle auxiliaire $\mathcal{C}'$ de rayon AD, et on refait la construction précédente à partir d'un point A' de $\mathcal{C}'$: on construit B' et C' sur $\mathcal{C}'$ tel que $A'B' = A'C' = \rho$ et D' distinct de A' tel que $B'D' = C'D' = \rho$ (B' et C' existent car $AD > \rho$). Si on note E' le point diamétralement opposé à A', on a:

$$A'D' = 2\frac{A'B'^2}{A'E'} = 2\frac{\rho^2}{2AD} = \frac{\rho^2}{\frac{\rho^2}{R}} = R.$$

On a donc trouvé en $A'D'$ le rayon cherché. Il est alors facile de construire le centre de $\mathcal{C}$. ■

Voyons maintenant une condition nécessaire pour que ABC soit rectangle en A:

Proposition 0.1.4.
Si le triangle ABC est rectangle en A, alors

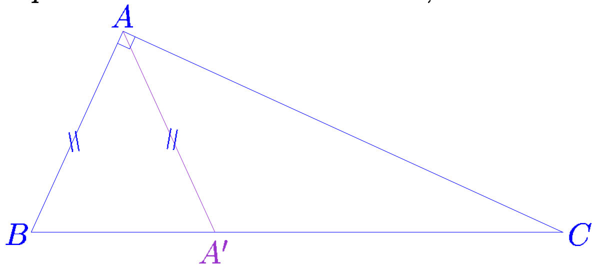
$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Démonstration. D'après le théorème précédente, $ah = bc$, d'où $a^2h^2 = b^2c^2$. De plus, d'après le théorème de pythagore, $a^2 = b^2 + c^2$, ainsi

$$b^2h^2 + c^2h^2 = b^2c^2 \Leftrightarrow \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{1}{h^2}.$$

■

Remarque: La réciproque de ce théorème est fausse;



Construisons un triangle ABC rectangle en A tel que $AC > AB$, ainsi que le point B' sur $[BC]$ tel que $AB = AB'$. Le triangle $AB'C$ n'est pas rectangle et pourtant vérifie l'égalité du théorème.

0.2 Trigonométrie.

Définition 0.2.1.
Soit ABC un triangle rectangle en A. On définit:

$$\sin\widehat{B} := \frac{AC}{BC},$$

$$\cos\widehat{B} := \frac{AB}{BC}$$

et

$$\tan\widehat{B} := \frac{AC}{AB}.$$

On les appelera respectivement cosinus, sinus et tangente de $\widehat{B}$.

Remarques:

- Le théorème de Thalès permet d'affirmer que cos, sin et tan sont bien définis.
- Par symétrie de la figure, on peut constater que $\cos\widehat{B} = \sin\widehat{C}$ et $\sin\widehat{C} = \cos\widehat{B}$.
- On a également,

$$\tan\widehat{B} = \frac{\sin\widehat{B}}{\cos\widehat{B}}.$$

Proposition 0.2.2.
Dans un triangle ABC rectangle en A, on a:

$$\cos^2\widehat{B} + \sin^2\widehat{B} = 1.$$

Démonstration. Ceci découle directement du théorème de pythagore:

$$\cos^2\widehat{B} + \sin^2\widehat{B} = \frac{AB^2 + AC^2}{BC^2} = \frac{BC^2}{BC^2} = 1.$$

■

Théorème 0.2.3.

L'aire d'un triangle ABC rectangle en A vaut:

$$\frac{AB \cdot AC}{2}.$$

L'aire d'un triangle quelconque ABC, non rectangle vaut:

$$\frac{1}{2}AB \cdot AC\sin\widehat{A} = \frac{1}{2}BC \cdot BA\sin\widehat{B} = \frac{1}{2}CA \cdot CB\sin\widehat{C}.$$

Démonstration. Pour la première assertion, il suffit de remarquer qu'un triangle rectangle est la moitié d'un rectangle.

Pour le deuxième assertion, notons H le pied de la hauteur issue de A. Considerons tout d'abord un triangle où $\widehat{A}$ est obtu. Dans ce cas, l'aire du triangle ABC est la somme des deux triangles rectangles BHA et AHC qui vaut:

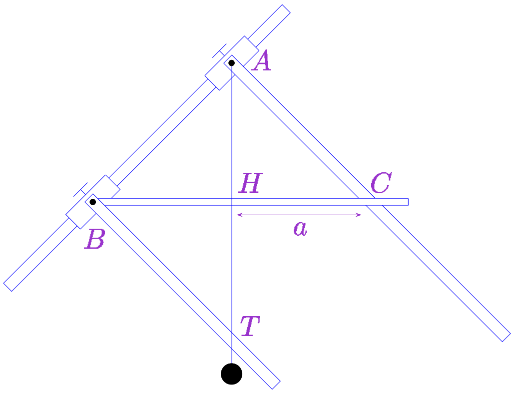
$$\frac{AH \cdot BH}{2} + \frac{AH \cdot HC}{2} = \frac{AH \cdot BC}{2}.$$

Or $\sin\widehat{B} = \frac{AH}{AB}$ d'où $AH = AB\sin\widehat{B}$ d'où le résultat. dans le cas où $\widehat{A}$ est aigu; si $\widehat{C}$ est obtu, alors son aire vaut $\frac{AH \cdot BH - AH \cdot CH}{2} = \frac{AH \cdot BC}{2}$ et on obtient le même résultat. on raisonne de même pour $\widehat{B}$ obtu. Les autres formules s'obtiennent de la même façon. ■

0.3 Applications.

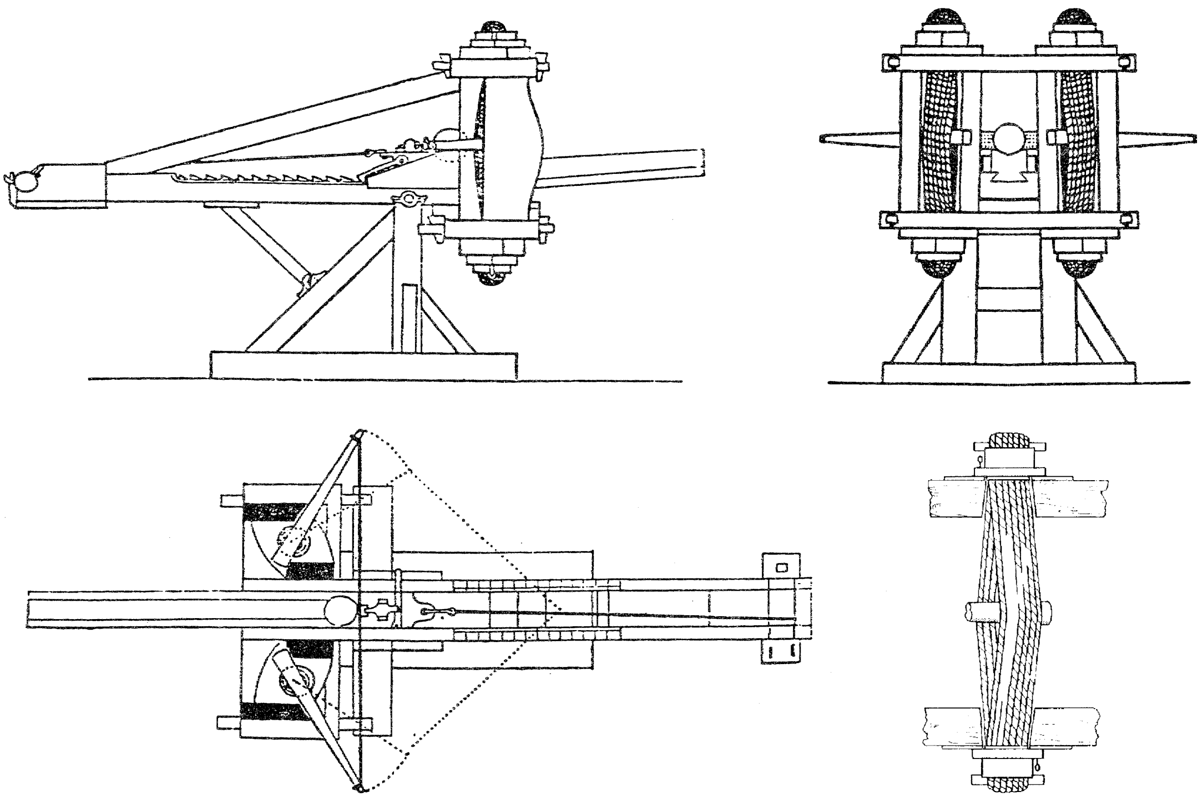
0.3.1 Un extracteur de racine cubique.

Un dispositif mécanique simple, inventé par un géomètre grec inconnu du $3^{\text{ème}}$ ou $4^{\text{ème}}$ siècle avant J.C., permettait d'extraire la racine cubique d'un nombre a.



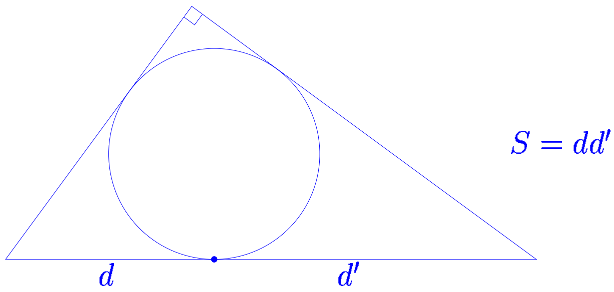
L'extracteur avait l'apparence du pied à coulisse ci-dessus. On placait l'appareil de façon à ce que le fil à plombs (AH) soit perpendiculaire à la barette (BC), puis on faisait coulisser B pour obtenir $HC = a$. La racine cubique de a était alors égale à la longueur $BH \cdot HT^2$.
Démonstration. Dans le triangle TBA rectangle en B, on a $BH^2 = AH \cdot HT$ et dans le triangle ABC rectangle en A, $AH^2 = BH \cdot a$, ce qui entraîne $BH^3 = a \cdot HT^2$. ∎

Cela était fort utile pour optimiser la construction des "catapultes à torsion". En effet, l'expérience montrait que les meilleurs résultats de tir étaient obtenus lorsque le diamètre d du faisceau de cordes élastiques (exprimé en dactyles) et le poids m du projectile (exprimé en mines) étaient liés par la relation $d \sim 1,1\sqrt[3]{m}$.



0.3.2 Une autre expression de l'aire d'un triangle rectangle.

Exercice: Montrez que l'aire d'un triangle rectangle est égale au produit des longueurs des segments découpés sur l'hypoténuse par le point de contact du cercle inscrit.



Démonstration. On découpe le triangle rectangle de la manière suivante et on obtient que son aire est égal à $dr + d'r + r^2$. On applique ensuite le théorème de pythagore:

$$(d + d')^2 = (d + r)^2 + (d' + r)^2,$$

ce qui est équivalent à $dd' = dr + d'r + r^2$ d'où le résultat. ∎