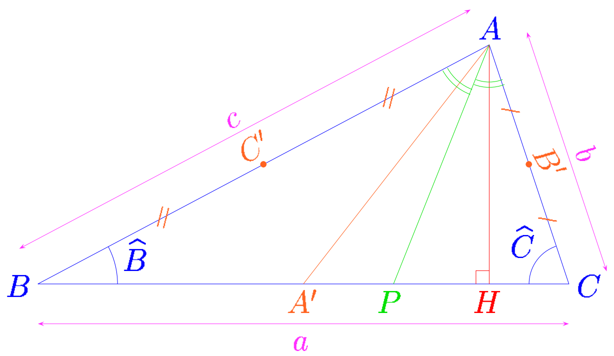
Relations métriques et trigonométriques dans un triangle quelconque. Applications.

Pré-requis:

- ⋄ La connaissance de la structure d'espace affine (Calcul de vecteurs, relation de Chasles).
- ⋄ Notion d'angle géométrique (En particulier, la somme d'angles géométriques, les angles alternes-internes sont égaux.)
- ⋄ Définition des fonctions trigonométriques (Par exemple, $\cos x = \mathrm{Re}(e^{ix}$ et $\sin x = \mathrm{Im}(e^{ix}))$.
- ⋄ Les formules trigonométriques.
- ⋄ Définitions d'une droite, d'un triangle, d'un barycentre.
- ⋄ Les relations trigonométriques dans le triangle rectangle.
- ⋄ Le produit scalaire, la norme de vecteur.
- ⋄ Le théorème de Thalès, le théorème de l'angle inscrit.

Cadre: On se place dans un plan affine euclidien $\mathcal{P}$.

Notation:



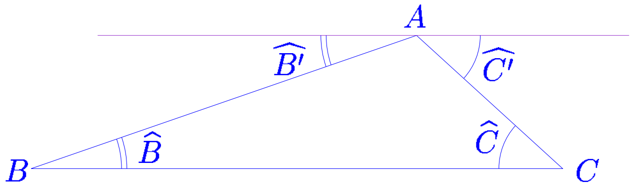
Nous noterons également S son aire, p son demi-périmètre et R le rayon de son cercle circonsrit.

0.1 La somme des angles d'un triangle.

Théorème 0.1.1.

La somme des trois angles géométriques d'un triangle est égal à π.

Démonstration. Soit ABC un triangle quelconque et $\mathcal{D}$ la droite passant par A parallèle à (BC).



Avec les notations du dessin, les angles $\widehat{C}$ et $\widehat{C'}$ sont alternes-internes, donc égaux et de la même façon, $\widehat{B} = \widehat{B'}$. Or $\widehat{C'} + \widehat{A} + \widehat{B'} = \pi$ d'où le résultat. ■

Exercice: Montrer que la somme des mesures des angles géométriques d'un polygone convexe à n côtés est $(n-2)\pi$.

Remarque: La généralisation aux polygones non convexes non croisés nécessite les angles de secteurs (dont la mesure est un élément de $[0, 2\pi]$).

0.2 Inégalité triangulaire et formules d'Al Kashi.

Théorème 0.2.1.

Formules d'Al Kashi.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\widehat{A},$$
$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\widehat{B},$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C}.$$

Démonstration. En développant, on a: $\overrightarrow{BC}^2 = \left(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)^2 = AC^2 + AB^2 - 2\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} = bc\cos\widehat{A}$.

Les deux autres formules se démontrent de manière analogue. ■

Remarque: On retrouve, dans le cas particulier du triangle rectangle, le théorème de pythagore.

Théorème 0.2.2.

L'inégalité triangulaire.

Soient a, b, c trois réels positifs, il existe un triangle dont les longueurs des côtés sont a, b, c si, et seulement si

$$|b-c| \leq a \leq b+c.$$

Démonstration. D'après la formule d'Al Kashi, on a:

$$\cos\widehat{A} = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

d'où $-1 \leq \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \leq 1$, ce qui équivaut à

$$b^2 + c^2 - 2bc \leq a^2 \leq b^2 + c^2 + 2bc,$$

puis à $|b-c| \leq a \leq b+c$.

Remarquons que l'égalité $a = b + c$ équivaut à $-1 = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ et, par suite, à $\cos\widehat{A} = -1$, c'est-à-dire à $A \in [BC]$; l'égalité $a = b - c$ équivaut à $\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = 1$, donc à $\cos\widehat{A} = 1$, c'est-à-dire à B élément de la demi-droite $[AC)$.

Inversement, on a vu que $|b-c| \leq a \leq b+c$ équivaut à $-1 \leq \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} \leq 1$ et, par suite, si a, b, c vérifient cette condition, il existe deux angles opposés, θ et $-\theta[2\pi]$, tels que $\cos\theta = \cos(-\theta) = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$. Si A et B sont deux points quelconques de $\mathcal{P}$ tels que $AB = c$ et si C est le point déterminé par $AC = b$ et $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \theta[2\pi]$, ABC est un triangle dont les côtés $[AB]$ et $[AC]$ ont des longueurs adéquates. On calcule alors la longueur du côté $[BC]$ par la formule d'Al Kashi: $BC^2 = b^2+c^2-2bc\cos\theta$; comme $\cos\theta = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$, il vient $BC = a$ et le triangle répond donc au problème. Une autre solution, correspondant à l'angle $-\theta$ est le triangle symétrique par rapport à (AB). ■

Exercices: Montrez que:

$$b = c \Leftrightarrow \widehat{B} = \widehat{C} \quad \text{(triangle isocèle)},$$

et

$$a = b = c \Leftrightarrow \widehat{A} = \widehat{B} = \widehat{C} \quad \text{(triangle équilatéral)}.$$

Démonstration. Le cas du triangle plat étant trivial, supposons qu'il ne l'est pas.

Supposons que $b = c$, en remplacant dans les deux formules d'Al Kashi:

$$b^2 = c^2 + a^2 - 2ca\cos\widehat{B} \quad \text{et} \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{C},$$

on a:

$$\cos\widehat{B} = \frac{a}{2c} = \frac{a}{2b} = \cos\widehat{C}$$

d'où l'égalité $\widehat{B} = \widehat{C}$.

Réciproquement, $\widehat{B} = \widehat{C}$ entraîne l'égalité des cosinus; en les exprimant via les deux mêmes formules d'Al Kashi, on obtient l'égalité:

$$\begin{aligned}
\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} &\Leftrightarrow bc^2 + a^2b - b^3 = ca^2 + b^2c - c^3 \\
&\Leftrightarrow b(a^2 - b^2 - bc + c^2) = ca^2 - c^3 \\
&\Leftrightarrow b(a^2 - (b+c)^2) + b^2c + 2c^2b = ca^2 - c^3 \\
&\Leftrightarrow b(a^2 - (b+c)^2) = c(a^2 - (b^2 + 2bc + c^2)) \\
\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca} = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} &\Leftrightarrow (b-c)(a^2 - (b+c)^2) = 0.
\end{aligned}$$

Le triangle n'étant pas plat, l'inégalité triangulaire est stricte; le terme $(a^2 - (a+b)^2)$ est non nul, d'où $b = c$.

Un triangle équilatéral est isocèle en A, en B et en C. Il résulte de ce qui précède qu'il y a équivalence entre l'égalité des trois angles et celle des trois côtés. ■

0.3 La loi des sinus.

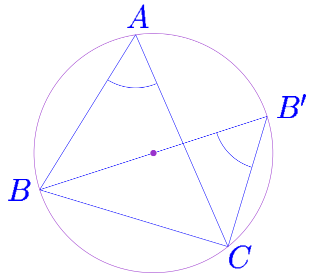
Théorème 0.3.1.

Dans tout triangle non plat ABC, on a:

$$\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}} = 2R = \frac{abc}{2S}$$

où R est le rayon du cercle circonscrit.

Démonstration. Soit B' le point diamétralement opposé à B sur le cercle circonscrit à ABC.



D'après le théorème de l'angle inscrit, $\widehat{A} = \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \left(\overrightarrow{B'B}, \overrightarrow{B'C}\right)$ $[\pi]$. Compte tenu des relations trigonométriques dans le triangle rectangle $BB'C$, on obtient

$$\sin \widehat{A} = \left|\sin\left(\overrightarrow{B'B}, \overrightarrow{B'C}\right)\right| = \frac{BC}{BB'} = \frac{a}{2R}$$

d'où les trois premières égalités annoncées. Si H est le projeté orthogonal de A sur $[BC]$,

$$S = \frac{1}{2} \times AH = \frac{1}{2} ac \sin \widehat{B}, \qquad \text{donc} \qquad \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{abc}{2S}.$$

■

Exercices: Montrez que:

- $$\sin A \sin B \sin C = \frac{S}{2R^2}.$$
- $$a\cos A + b\cos B + c\cos C = \frac{abc}{2R^2} = \frac{2S}{R}.$$

Corollaire 0.3.2.
Formule de Héron
Soit ABC un triangle non plat. On a:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

Démonstration. Puisque $S = \frac{1}{2} bc \sin \widehat{A}$, on a:

$$\begin{aligned}
S^2 &= \frac{1}{4} b^2c^2 \left(1 - \cos^2 \widehat{A}\right) \\
&= \frac{1}{4} b^2c^2 \left(1 - \left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)^2\right) \quad \text{(théorème d'Al Kashi)} \\
&= \frac{1}{16} \left(4b^2c^2 - \left(b^2+c^2-a^2\right)^2\right) \\
&= \frac{1}{16} \left(2bc - b^2 - c^2 + a^2\right)\left(2bc + b^2 + c^2 - a^2\right) \\
&= \frac{1}{16} \left(a^2 - \left(b^2-c^2\right)^2\right)\left(\left(b^2+c^2\right)^2 - a^2\right) \\
&= \frac{a-b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} \cdot \frac{-a+b+c}{2} \cdot \frac{a+b+c}{2} \\
S^2 &= p(p-a)(p-b)(p-c).
\end{aligned}$$

■

Remarque: Il existe une généralisation de la formule de Héron pour les quadrilatères inscriptibles:

Théorème 0.3.3.
Théorème de Brahmagupta
Un quadrilatère convexe inscriptible dont les côtés ont pour longueurs recpectives a, b, c, d et dont le demi-périmètre est p a pour aire:

$$S = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

Démonstration. Soit $x = BD$. Dans les triangles ABD et CBD on a: $x^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\widehat{A} = c^2 + d^2 - 2cd\cos\widehat{C}$ (Théorème d'Al Kashi). Comme $ABCD$ est inscriptible, on a $\widehat{C} = \pi - \widehat{A}$ et $\cos\widehat{C} = \cos\left(\pi - \widehat{A}\right) = -\cos\widehat{A}$ et, par suite:

$$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 = 2(ab+cd)\cos\widehat{A}.$$

L'air S de $ABCD$ est la somme des aires des deux triangles:

$$S = \frac{ab\sin\widehat{A} + cd\sin\widehat{C}}{2}$$

et, comme $\sin\widehat{C} = \sin\left(\pi - \widehat{A}\right) = \sin\widehat{A}$, il vient: $4S = 2(ab+cd)\sin\widehat{A}$.

De

$$4(ab+cd)^2 = \left(2(ab+cd)\cos\widehat{A}\right)^2 + \left(2(ab+cd)\sin\widehat{A}\right)^2$$

on déduit:

$$4(ab+cd)^2 = (a^2+b^2-c^2-d^2)^2 + 16S^2 \quad \text{et} \quad 16S^2 = 4(ab+cd)^2 - (a^2+b^2-c^2-d^2)^2.$$

En factorisant:

$$\begin{aligned}
16S^2 &= \left(2(ab+cd) - (a^2+c^2-c^2-d^2)\right)\left(2(ab+cd) + (a^2+b^2-c^2-d^2)\right)\\
&= \left((c+d)^2 - (a-b)^2\right)\left((a+b)^2 - (c-d)^2\right)\\
&= (c+d-a+b)(c+d+a-b)(a+b-c+d)(a+b+c-d)\\
16S^2 &= (2p-2a)(2p-2b)(2p-2c)(2p-2d)
\end{aligned}$$

d'où le résultat. ∎

0.4 Formules de la médiane.

Théorème 0.4.1.
Soit ABC un triangle, on a:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = AA'^2 - A'B^2 = AA'^2 - \frac{BC^2}{4},$$

$$AB^2 + AC^2 = 2AA'^2 + \frac{BC^2}{2}$$

et

$$AB^2 - AC^2 = 2\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{CB}.$$

Démonstration. On calcule:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} &= \left(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'B}\right)\cdot\left(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'C}\right)\\ &= AA'^2-A'B^2+\overrightarrow{AA'}\cdot\underbrace{\left(\overrightarrow{A'C}+\overrightarrow{A'B}\right)}_{=\overrightarrow{0}}.\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}AB^2+AC^2 &= \left(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'B}\right)^2+\left(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'C}\right)^2\\ &= 2AA'^2+\underbrace{A'B^2+A'C^2}_{\left(\frac{BC}{2}\right)^2+\left(\frac{BC}{2}\right)^2}+2\overrightarrow{AA'}\cdot\underbrace{\left(\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{A'C}\right)}_{=\overrightarrow{0}}\\ &= 2AA'^2+\frac{BC^2}{2}.\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}AB^2-AC^2 &= \left(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'B}\right)^2-\left(\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{A'C}\right)^2\\ &= \underbrace{A'B^2-A'C^2}_{\left(\frac{BC}{2}\right)^2-\left(\frac{BC}{2}\right)^2}+2\overrightarrow{AA'}\cdot\underbrace{\left(\overrightarrow{A'B}-\overrightarrow{A'C}\right)}_{=\overrightarrow{CB}}\\ &= 2\overrightarrow{AA'}\cdot\overrightarrow{CB}.\end{aligned}$$

■

Conséquences:

- Le triangle ABC est rectangle en A si, et seulement si A appartient au cercle de diamètre $[BC]$.
- Le triangle ABC est isocèle en A si, et seulement si la médiane issue de A est la hauteur issue de A.

Exercice: Soit G l'isobarycentre de A, B, C. Montrez que

$$GA^2+GB^2+GC^2=\frac{1}{3}\left(a^2+b^2+c^2\right)$$

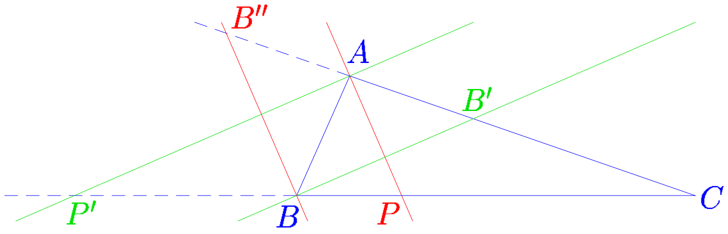
et trouver le point M tel que $MA^2+MB^2+MC^2$ soit minimale.

0.5 Théorème des bissectrices.

Théorème 0.5.1.
Soit ABC un triangle non plat tel que $AB \neq AC$ et P et P' les pieds des bissectrices intériaures et extérieures issues de A. Alors

$$\frac{P'B}{P'C}=\frac{PB}{PC}=\frac{AB}{AC}.$$

Démonstration. Si $AB = AC$, P' n'existe pas dans le plan affine, car (AP') est parallèle à (AB).



Soient B' et B'' les points de (AC) tels que $AB' = AB'' = AB$ avec $\overrightarrow{AB'}$ de même sens que $\overrightarrow{AC}$. L'égalité des normes de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AB'}$ fait que $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB''} = \overrightarrow{B''B}$ est un vecteur directeur de la bissectrice intérieure (AP). De même, $\overrightarrow{BB'}$ est un vecteur directeur de (AP'). Ainsi, les droites (BB') et (AP') sont parallèles ainsi que (BB'') et (AP). Dans le triangle ACP', on peut appliquer le théorème de Thalès;

$$\frac{P'B}{P'C} = \frac{AB'}{AC} = \frac{AB}{AC} \qquad (AB' = AB),$$

et de même dans le triangle CBB'', on a:

$$\frac{PB}{PC} = \frac{AB''}{AC} = \frac{AB'}{AC} = \frac{AB}{AC}.$$

■

Exercice: Construire un triangle dont on connait la longueur de deux côtés et la longueur de la bissectrice intérieure de l'angle adjacent.