

Définition et propriétés du produit scalaire dans le plan; expression dans une base orthonormale. Application au calcul de distances et d'angles.

Pré-requis:

- ◇ La connaissance de la structure d'espace affine du plan (Calcul de vecteurs et relation de Chasles) et du plan vectoriel associé.
- ◇ La définition d'une norme.
- ◇ La définition de la fonction cosinus.

Cadre: On se place dans un plan affine orienté \mathcal{P} de plan vectoriel associé $\vec{\mathcal{P}}$ de corps de base \mathbb{R} .

0.1 Le produit scalaire du plan.

Définition 0.1.1.

Un produit scalaire sur $\vec{\mathcal{P}}$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive sur $\vec{\mathcal{P}}$. Autrement dit, c'est une application $\varphi : \vec{\mathcal{P}} \times \vec{\mathcal{P}} \rightarrow \mathbb{R}$ qui à tout $(\vec{u}, \vec{v}) \in \vec{\mathcal{P}}$ associe un scalaire $\varphi(\vec{u}, \vec{v})$, noté $\vec{u} \cdot \vec{v}$ et vérifiant pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}', \vec{v}'$ de \mathcal{P} et tous scalaires λ :

•

$$(\vec{u} + \vec{u}') \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u}' \cdot \vec{v}, \quad (\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v} = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}).$$

(φ est linéaire en le premier vecteur)

•

$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{v}') = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{v}', \quad \vec{u} \cdot (\lambda \vec{v}) = \lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}).$$

(φ est linéaire en le second vecteur)

•

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$

(φ est symétrique)

•

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{u} = \vec{0}.$$

(φ est définie)

•

$$\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0.$$

(φ est positive)

Remarque: Les deux dernières assertions sont équivalentes à l'implication $\vec{u} \neq \vec{0} \Rightarrow \vec{u} \cdot \vec{u} > 0$.

Soit (\vec{e}_1, \vec{e}_2) une base de $\vec{\mathcal{P}}$ et $\vec{u} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$ et $\vec{v} = x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2$ deux vecteurs de $\vec{\mathcal{P}}$. Alors, l'application $(\vec{u}, \vec{v}) \mapsto xx' + yy'$ est un produit scalaire (vérifications immédiates), il existe donc au moins un produit scalaire sur \mathcal{P} . On dira que ce produit scalaire est le produit scalaire canonique associé à la base (\vec{e}_1, \vec{e}_2) .

Pour information, voici une recherche de tous les produits scalaires du plan:

Si φ est un produit scalaire, et en notant $\vec{u} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$ et $\vec{v} = x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2$, on a:

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{u}, \vec{v}) &= \varphi(x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2, x'\vec{e}_1 + y'\vec{e}_2) \\ &= xx'\varphi(\vec{e}_1, \vec{e}_1) + xy'\varphi(\vec{e}_1, \vec{e}_2) + x'y\varphi(\vec{e}_2, \vec{e}_1) + yy'\varphi(\vec{e}_2, \vec{e}_2).\end{aligned}$$

Ce que l'on peut encore écrire

$$\varphi(\vec{u}, \vec{v}) = (x, y) \underbrace{\begin{pmatrix} \varphi(\vec{e}_1, \vec{e}_1) & \varphi(\vec{e}_1, \vec{e}_2) \\ \varphi(\vec{e}_2, \vec{e}_1) & \varphi(\vec{e}_2, \vec{e}_2) \end{pmatrix}}_{:=M} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Afin d'alléger les calculs, posons $a_{i,j} := \varphi(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$ pour tout i et j . Puisque φ est symétrique, on a $a_{i,j} = a_{j,i}$. Traduisons le fait que φ soit définie positive:

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{u}, \vec{u}) &= a_{1,1}x^2 + 2a_{1,2}xy + a_{2,2}y^2 \\ &= a_{1,1} \left(x^2 + 2\frac{a_{1,2}}{a_{1,1}}xy \right) + a_{2,2}y^2 \quad (\text{pour } a_{1,1} \neq 0) \\ &= a_{1,1} \left(x + \frac{a_{1,2}}{a_{1,1}}y \right)^2 - \frac{a_{1,2}^2}{a_{1,1}}y^2 + a_{2,2}y^2 \\ &= a_{1,1} \left(x + \frac{a_{1,2}}{a_{1,1}}y \right)^2 + \frac{a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}^2}{a_{1,1}}y^2.\end{aligned}$$

Au cours des calculs, on a supposé $a_{1,1} \neq 0$, si $a_{1,1} = 0$, alors

$$\varphi(\vec{u}, \vec{u}) > 0 \Leftrightarrow a_{2,2}y^2 > -2a_{1,2}xy, \text{ pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Si $a_{2,2} < 0$ c'est équivalent à écrire $y^2 < -2\frac{a_{1,2}}{a_{2,2}}xy$, à y fixé, on peut toujours trouver un x qui rendra la partie de droite négative, ce qui est absurde. Si $a_{2,2} > 0$, on a $y^2 > -2\frac{a_{1,2}}{a_{2,2}}xy$, à y fixé, on peut rendre la partie de droite aussi grande que l'on veut, ce qui est également absurde, de plus, il est clair qu'il est impossible que $a_{2,2}$ soit nul, par conséquent $a_{1,1} \neq 0$. Supposons d'abord $a_{1,1} < 0$, alors

$$\varphi(\vec{u}, \vec{u}) > 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{a_{1,2}}{a_{1,1}}y \right)^2 < \frac{a_{1,2}^2 - a_{1,1}a_{2,2}}{a_{1,1}^2}y^2, \text{ pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

A y fixé, la quantité de droite est constante alors que celle de gauche peut-être aussi grande que l'on souhaite en faisant varier x , c'est donc impossible et par conséquent $a_{1,1} > 0$. Ainsi, on a

$$\varphi(\vec{u}, \vec{u}) > 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{a_{1,2}}{a_{1,1}}y \right)^2 > \frac{a_{1,2}^2 - a_{1,1}a_{2,2}}{a_{1,1}^2}y^2, \text{ pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Si $a_{1,2}^2 - a_{1,1}a_{2,2} > 0$, on obtient encore une absurdité, car à y fixé, le membre de gauche peut être rendu aussi grand que l'on souhaite, donc $a_{1,2}^2 - a_{1,1}a_{2,2} < 0$ (l'inégalité est alors toujours vérifiée car un nombre positif est toujours supérieur à un nombre négatif). Réciproquement, si $a_{1,1} > 0$ et $a_{1,2}^2 - a_{1,1}a_{2,2} < 0$, alors $\varphi(\vec{u}, \vec{u}) > 0$. On obtient donc le théorème suivant:

Théorème 0.1.2.

Soient (x, y) et (x', y') les coordonnées des vecteurs \vec{u} et \vec{v} dans la base (\vec{e}_1, \vec{e}_2) de \mathcal{P} . L'application φ est un produit scalaire sur \mathcal{P} si, et seulement si il existe trois réels a, b et c tels que pour tout $(\vec{u}, \vec{u}) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}$ on a:

$$\varphi(\vec{u}, \vec{u}) = axx' + b(xy' + x'y) + cyy' \quad \text{et} \quad a > 0, ac - b^2 > 0.$$

Notation: Posons $\|\vec{u}\| := \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}$.

Théorème 0.1.3.

Pour tout $(\vec{u}, \vec{v}) \in \mathcal{P} \times \mathcal{P}$ on a:

$$|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|,$$

c'est l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

On a une égalité si, et seulement si \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires.

Démonstration. Soit λ un réel quelconque,

$$\begin{aligned} \|\vec{u} + \lambda\vec{v}\|^2 &= (\vec{u} + \lambda\vec{v}) \cdot (\vec{u} + \lambda\vec{v}) \\ &= \|\vec{u}\|^2 + 2\lambda\vec{u} \cdot \vec{v} + \lambda^2 \cdot \|\vec{v}\|^2. \end{aligned}$$

C'est un polynôme du second degré en λ qui est toujours positif, ce qui signifie que son discriminant réduit est négatif, c'est-à-dire: $\Delta' = (\vec{u} \cdot \vec{v})^2 - \|\vec{u}\|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 \leq 0$, d'où l'inégalité recherchée. L'égalité aura lieu si, et seulement si $\Delta' = 0$, alors notre trinôme en λ a une racine double λ_0 qui vérifie $\vec{u} + \lambda_0\vec{v} = \vec{0}$ et par conséquent \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires. ■

Corollaire 0.1.4.

L'application

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : \mathcal{P} &\longrightarrow \mathbb{R}_+ \\ \vec{u} &\longmapsto \|\vec{u}\| \end{aligned}$$

est une norme sur \mathcal{P} , appelée norme euclidienne.

Démonstration. Pour tout λ réel, on a toujours

$$\|\lambda\vec{u}\| = \sqrt{(\lambda\vec{u}) \cdot (\lambda\vec{u})} = |\lambda| \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}} = |\lambda| \cdot \|\vec{u}\|$$

et $\|\vec{u}\| = 0$ entraîne $\vec{u} \cdot \vec{u} = 0$ donc $\vec{u} = \vec{0}$. Regardons l'inégalité triangulaire:

$$\begin{aligned} \|\vec{u} + \vec{v}\| \leq \|\vec{u}\| + \|\vec{v}\| &\Leftrightarrow \|\vec{u} + \vec{v}\|^2 \leq (\|\vec{u}\| + \|\vec{v}\|)^2 \\ &\Leftrightarrow (\vec{u} + \vec{v})^2 \leq \vec{u}^2 + \vec{v}^2 + 2\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \\ &\Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \end{aligned}$$

et la dernière inégalité provient directement de l'inégalité de Cauchy-Schwarz précédemment démontrée. ■

Remarque: Si M et N sont deux points de E , on appelle la longueur du segment $[MN]$ la norme euclidienne du vecteur \overrightarrow{MN} , c'est la distance euclidienne entre M et N que l'on notera simplement MN .

Propriétés 0.1.5.

Le produit scalaire se calcule à partir de la norme euclidienne à l'aide des formules suivantes:

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{v} &= \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2), \\ \vec{u} \cdot \vec{v} &= \frac{1}{2} (\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2), \\ \vec{u} \cdot \vec{v} &= \frac{1}{4} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u} - \vec{v}\|^2).\end{aligned}$$

0.2 Les bases orthonormées du plan.

Définition 0.2.1.

Deux vecteurs de \mathcal{P} sont dit orthogonaux lorsque leur produit scalaire est nul. Le couple (\vec{i}, \vec{j}) est alors une base orthonormée si $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 1$ et $\vec{i} \cdot \vec{j} = 0$.

Théorème 0.2.2.

Le plan muni d'un produit scalaire possède des bases orthonormées.

Démonstration. Soit (\vec{e}_1, \vec{e}_2) une base de \mathcal{P} . Posons $\vec{u}_1 = \vec{e}_1$ et $\vec{u}_2 = \vec{e}_2 - \frac{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2}{\|\vec{e}_1\|^2} \cdot \vec{e}_1$. Alors

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 - (\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2) \cdot \frac{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1}{\|\vec{e}_1\|^2} = 0.$$

Reste à voir que (\vec{u}_1, \vec{u}_2) est encore une base de \mathcal{P} , comme \mathcal{P} est un espace vectoriel de dimension deux, il suffit de montrer que \vec{u}_1 et \vec{u}_2 sont libres; soient λ_1 et λ_2 deux réels tels que $\lambda_1 \vec{u}_1 + \lambda_2 \vec{u}_2 = \vec{0}$, en remplaçant on a

$$\left(\lambda_1 - \lambda_2 \frac{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2}{\|\vec{e}_1\|^2} \right) \cdot \vec{e}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{e}_2 = \vec{0}.$$

Or (\vec{e}_1, \vec{e}_2) est une base de \mathcal{P} donc $\lambda_2 = 0$ et $\lambda_1 = \frac{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2}{\|\vec{e}_1\|^2} \lambda_2 = 0$ d'où le résultat souhaité. Il ne reste plus qu'à normer \vec{u}_1 et \vec{u}_2 (en les divisant par leur norme respective) pour obtenir le résultat souhaité. ■

Remarques:

- Ce résultat reste vrai pour un espace vectoriel de dimension n ; c'est une démonstration par récurrence initiée par ce que l'on vient de démontrer. Cet algorithme est appelé procédé d'orthonormalisation de *Gram-Schmidt*.
- La démonstration précédente fait apparaître le vecteur $\frac{\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2}{\|\vec{e}_1\|^2} \cdot \vec{e}_1$ que l'on appellera le projeté orthogonal de \vec{e}_2 sur \vec{e}_1 et que l'on notera $\vec{P}_{\vec{e}_1}(\vec{e}_2)$.

0.3 Expressions du produit scalaire.

Théorème 0.3.1.

Expression analytique du produit scalaire dans une base orthonormée
Si (\vec{v}, \vec{v}') est une base de $\vec{\mathcal{P}}$ et si $\vec{u} = x\vec{v} + y\vec{v}'$ et $\vec{v} = x'\vec{v} + y'\vec{v}'$, alors

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'.$$

Démonstration. C'est une simple vérification. ■

Théorème 0.3.2.

Expression à l'aide du projeté orthogonal du produit scalaire dans une base orthonormée
Soient A, B, C trois points de \mathcal{P} et H le point tel que $\vec{p}_{AB}(\vec{AC}) = \vec{AH}$. Alors,

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot \vec{AH}.$$

Le point H est appelé le projeté orthogonal du point C sur la droite (AB) .

Démonstration.

$$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = \vec{AB} \cdot (\vec{AH} + \vec{HC}) = \vec{AB} \cdot \vec{AH} + \vec{AB} \cdot \vec{HC}.$$

Or $\vec{HC} = \vec{AC} - \vec{AH} = \vec{AC} - \vec{p}_{AB}(\vec{AC})$ qui est orthogonal à \vec{AB} d'après la démonstration de l'existence de bases orthonormées dans le plan. ■

Définition 0.3.3.

Soient \vec{u} et \vec{v} deux vecteurs non nuls de $\vec{\mathcal{P}}$ muni d'une base orthonormée. Alors,

$$\cos((\vec{u}, \vec{v})) := \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}.$$

Le nombre (\vec{u}, \vec{v}) est défini modulo 2π , on l'appelle l'angle orienté des vecteurs \vec{u} et \vec{v} .

0.4 Applications.

0.4.1 L'identité du parallélogramme.

Théorème 0.4.1.

Si $ABCD$ est un parallélogramme, alors

$$AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + BC^2).$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} AC^2 + BD^2 &= (\vec{AB} + \vec{BC})^2 + (\vec{BA} + \vec{BC})^2 \\ &= 2(AB^2 + BC^2) + 2\vec{AB} \cdot \vec{BC} + 2\vec{BA} \cdot \vec{BC} \\ AC^2 + BD^2 &= 2(AB^2 + BC^2) \end{aligned}$$

0.4.2 Formule d'Al Kashi.

Théorème 0.4.2.

Soit ABC un triangle, alors

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot BC \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}).$$

Démonstration. Il suffit d'écrire,

$$BC^2 = \overrightarrow{BC}^2 = (\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})^2 = \overrightarrow{AC}^2 + \overrightarrow{AB}^2 - 2\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}. \quad \blacksquare$$

Corollaire 0.4.3.

Théorème de Pythagore

Un triangle ABC est rectangle en A (c'est-à-dire, \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} orthogonaux) si, et seulement si

$$BC^2 = AC^2 + AB^2.$$

Conséquence: Dans un triangle ABC rectangle en A , on a:

$$\cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \frac{BA}{BC}.$$

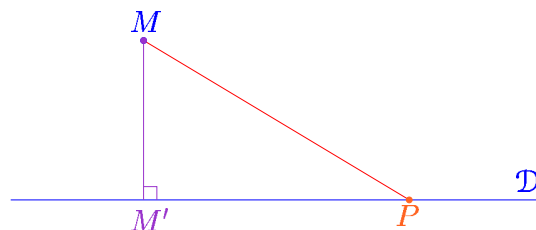
En effet, $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = BA^2 + \overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = BA^2$ et $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = BA \cdot BC \cos(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})$.

0.4.3 Distance d'un point à une droite.

Proposition 0.4.4.

Le projeté orthogonal M' d'un point M sur une droite \mathcal{D} est l'unique point P de \mathcal{D} tel que la distance MP soit minimale; c'est la distance de M à la droite \mathcal{D} notée $d(M, \mathcal{D})$.

Démonstration. Commençons par faire un dessin:



Pour tout point P de la droite \mathcal{D} , d'après le théorème de Pythagore dans le triangle $PM'M$ rectangle en M' , on a $MP^2 = MM'^2 + M'P^2$ et la distance $M'P^2$ est strictement positive si, et seulement si P est distinct de M' . \blacksquare

Proposition 0.4.5.

Soient $M \in \mathcal{P}$, $A \in \mathcal{D}$ et $\vec{u} \in \vec{\mathcal{D}}^\perp$. Alors,

$$\overline{M'M} = \frac{\overline{AM} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|}.$$

En particulier,

$$d(M, \mathcal{D}) = \frac{|\overline{AM} \cdot \vec{u}|}{\|\vec{u}\|}.$$

Démonstration. Le vecteur $\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$ est unitaire et colinéaire à $\overline{M'M}$, donc

$$\overline{M'M} = \overline{M'M} \cdot \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$$

et

$$\overline{AM} \cdot \overline{M'M} = \overline{M'M} \cdot \frac{\overline{AM} \cdot \vec{u}}{\|\vec{u}\|},$$

or

$$\begin{aligned} \overline{AM} \cdot \overline{M'M} &= (\overline{AM} + \overline{M'M}) \cdot \overline{M'M} \\ &= \overline{M'M} \cdot \overline{M'M} \\ &= \overline{M'M}^2 \cdot \frac{\|\vec{u}\|^2}{\|\vec{u}\|^2} \\ \overline{AM} \cdot \overline{M'M} &= \overline{M'M}^2 \end{aligned}$$

■