

# Définition de $e^z$ pour $z$ élément de $\mathbb{C}$ . Propriétés. Etude de la fonction de la variable réelle $t \mapsto e^{it}$ et plus généralement de $t \mapsto e^{at}$ , où $a \in \mathbb{C}$ . Applications.

## Pré-requis:

- ◇ Définition des séries entières, les critères de Cauchy et d'Alembert traitant du rayon de convergence d'une série entière, le théorème de dérivation d'une série entière.
- ◇ Théorème de passage à la limite dans les sommes infinies: Soient,
  - $(a_{n,k})$  une suite double de nombres complexes,
  - $(b_k)$  une suite de nombres complexes et
  - $(c_k)$  une suite de nombres réels positifs ou nuls, vérifiant:

- $\forall k \in \mathbb{N}$ ,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n,k} = b_k.$$

- $\forall (n, k) \in \mathbb{N}^2$ ,

$$|a_{n,k}| \leq c_k.$$

- La série de terme général  $c_k$  est convergente.

Alors,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k.$$

- ◇ Définition de  $e^x$  pour  $x \in \mathbb{R}$ , comme limite de la suite  $u$  définie par  $u_n = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$  et ses propriétés.
- ◇ Définition du cosinus et sinus réels.
- ◇ Formule du binôme.
- ◇ Produit de Cauchy des séries entières.

## 0.1 L'exponentielle complexe.

### Lemme 0.1.1.

Pour tout  $z$  dans  $\mathbb{C}$ , on a:

- (i) La série  $\sum_{n \geq 0} \frac{z^n}{n!}$  est normalement convergente.
- (ii) La suite  $n \mapsto e_n(z) = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$  est convergente.
- (iii)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n.$$

*Démonstration.* (i) Si on note  $a_n := \frac{1}{n!}$  (terme strictement positif pour tout  $n$ ), alors  $\frac{a_n}{a_{n+1}} = n + 1 \rightarrow +\infty$ , donc la série entière proposée à un rayon de convergence infinie donc elle est absolument convergente pour tout  $z \in \mathbb{C}$ .

(ii) et (iii) D'après la formule du binôme,

$$\begin{aligned} e_n(z) &= \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{z}{n}\right)^k \\ &= 1 + z + \sum_{k=2}^n \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k} \cdot \frac{z^k}{k!} \\ &= 1 + z + \sum_{k=2}^n \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \frac{z^k}{k!} \\ &= 1 + z + \sum_{k=2}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \frac{z^k}{k!} \end{aligned}$$

Puisque pour  $n > k$ ,  $\left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$  est nul. Soit,

$$\begin{cases} a_{n,0} = 1 \\ a_{n,1} = z \\ a_{n,k} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \cdot \frac{z^k}{k!}, \text{ si } k \geq 2. \end{cases}$$

On remarque que, pour  $k$  fixé,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n,k} = b_k := \frac{z^k}{k!}.$$

De plus,  $\forall (n, k) \in \mathbb{N}^2$ ,

$$|a_{n,k}| \leq c_k := \frac{|z|^k}{k!}$$

qui ne dépend pas de  $n$  tout en vérifiant que la série des  $c_k$  converge ((i)).

On applique alors le théorème de passage à la limite dans une somme infinie pour en déduire que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k}$$

existe et vaut

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lim_{n \rightarrow +\infty} a_{n,k} = \sum_{k=0}^{\infty} b_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{k!}.$$

■

Ce lemme nous permet alors de donner la définition suivante:

**Définition 0.1.2.**

Pour chaque  $z \in \mathbb{C}$ , on définit l'exponentielle de  $z$  comme étant

$$\exp z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

**Notation:**  $e^z = \exp z$ .

Cet dénomination est justifiée par le lemme précédent, qui nous dit que l'exponentielle complexe ainsi définie coïncide sur l'axe réel avec l'exponentielle réelle.

### Propriétés 0.1.3.

La fonction exponentielle vérifie pour tout  $z, w \in \mathbb{C}$ :

(i)

$$\exp(0) = 1.$$

(ii)

$$\exp(z + w) = \exp(z) \exp(w).$$

(iii)

$$\exp(z) \exp(-z) = 1.$$

(iv)

$$\exp(z) \neq 0.$$

(v)

$$\frac{d}{dz} \exp(z) \text{ existe et vaut } \exp(z).$$

(vi)

$$\overline{\exp(z)} = \exp(\bar{z}).$$

(vii)

$$|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}.$$

*Démonstration.* (i) C'est évident.

(ii)

$$\begin{aligned} \exp(z + w) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z + w)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k w^{n-k} \quad (\text{Formule du binôme}) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \cdot \frac{w^{n-k}}{(n-k)!} \\ \exp(z + w) &= \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \right) \cdot \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!} \right) \quad (\text{Produit de Cauchy}). \end{aligned}$$

(iii) Résulte de (i) et (ii) en écrivant (ii) avec  $w = -z$ .

(iv) Si  $\exp(z) = 0$  alors pour tout  $w \in \mathbb{C} \setminus \{z\}$ ,  $\exp(w) = \exp(w - z) \exp(z) = 0$  or  $\exp(0) = 1$ .

(v) Résulte du théorème de dérivation des séries entière en remarquant que si  $a_n = \frac{1}{n!}$  alors  $a_n = (n+1)a_{n+1}$  et donc la série entière  $\sum a_n z^n$  est égale à sa série entière dérivée.

(vi)

$$\begin{aligned}\overline{\exp(z)} &= \overline{\sum_{n \geq 0} a_n z^n} \\ &= \sum_{n \geq 0} \overline{a_n z^n} \\ &= \sum_{n \geq 0} a_n \overline{z^n} \\ \overline{\exp(z)} &= \exp(\overline{z}).\end{aligned}$$

(vii)

$$\begin{aligned}|e^z|^2 &= \exp(z) \cdot \overline{\exp(z)} \\ &= \exp(z) \cdot \exp(\overline{z}) \\ &= \exp(z + \overline{z}) \\ &= \exp(2 \operatorname{Re} z) \\ |e^z|^2 &= (\exp(\operatorname{Re} z))^2.\end{aligned}$$

Or  $|e^z|^2$  et  $(\exp(\operatorname{Re} z))^2$  sont deux nombres réels positifs, ils sont donc égaux. ■

**Définition 0.1.4.**

Pour  $z \in \mathbb{C}$ , on définit son cosinus et son sinus par:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$$

et

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}.$$

**Remarques:**

•

$$\frac{d}{dz} \cos z = -\sin z \quad \text{et} \quad \frac{d}{dz} \sin z = \cos z.$$

•

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z.$$

Pour justifier la définition précédente (ce n'est pas une obligation dans cette leçon), il suffit de démontrer:

**Proposition 0.1.5.**

Notons  $\cos$  et  $\sin$  les fonctions cosinus et sinus réelles.

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions dérivables de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  vérifiant:

$$f(0) = 1, \quad g(0) = 0$$

et

$$f' = -g, \quad g' = f.$$

Alors,

$$f = \cos \quad \text{et} \quad g = \sin.$$

*Démonstration.* Posons

$$u(x) = f(x) \cos x + g(x) \sin x \quad \text{et} \quad v(x) = f(x) \sin x - g(x) \cos x.$$

$u'(x) = f'(x) \cos x - f(x) \sin x + g'(x) \sin x + g(x) \cos x = 0$  et de même  $v'(x) = 0$  donc  $u \equiv 1$  et  $v \equiv 0$ . Or  $f(x) = u(x) \cos x + v(x) \sin x = \cos x$  et  $g(x) = u(x) \sin x - v(x) \cos x = \sin x$ . ■

Les fonctions  $\cos$  et  $\sin$  définies sur  $\mathbb{C}$  vérifiant les conditions de la proposition lorsqu'on les restreint à  $\mathbb{R}$ , elles coïncident donc sur  $\mathbb{R}$  avec les fonctions  $\sin$  et  $\cos$  usuelles.

## 0.2 Les fonctions $t \mapsto e^{at}$ , avec $a \in \mathbb{C}$ .

### Théorème 0.2.1.

La fonction  $g$  définie par:

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto e^{at}, \text{ avec } a \in \mathbb{C} \end{aligned}$$

est indéfiniment dérivable et  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\frac{d^n}{dt^n} g(t) = a^n g(t).$$

*Démonstration.* La première assertion est immédiate, en remarquant que  $g$  est la composée de deux fonctions  $\mathcal{C}^\infty$ .

La deuxième assertion se démontre par récurrence sur  $n$  à l'aide de la définition de  $\exp$ . ■

### Propriétés 0.2.2.

(i)  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,

$$e^{it} = \cos t + i \sin t.$$

(ii)  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,

$$|e^{it}| = 1.$$

(iii) Les formules d'Euler:  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}$$

et

$$\sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}.$$

(iv) La formule de De Moivre:  $\forall t \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$ ,

$$(e^{it})^n = e^{int},$$

c'est-à-dire,

$$(\cos t + i \sin t)^n = \cos nt + i \sin nt.$$

*Démonstration.* Tout ceci découle directement de la partie précédente. ■

## 0.3 Applications.

### 0.3.1 La linéarisation de $(\cos t)^n$ et $(\sin t)^n$ .

Cette opération consiste à écrire  $(\cos t)^n$  ou  $(\sin t)^n$  comme combinaison linéaire de cos et de sin.

Pour cela, on écrit la formule d'Euler:

$$(\cos t)^n = \left( \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \right)^n,$$

on développe ensuite avec l'aide de la formule du binôme et on regroupe les termes de sorte de faire apparaître des cosinus et de sinus.

**Exercice:** Linéariser  $(\cos t)^4$ .

**Remarque:** Cette méthode a pour intérêt de trouver les primitives de  $(\cos t)^n$  ou  $(\sin t)^n$  ou encore leur produit, néanmoins, lorsque  $n$  est impair, il est toujours possible de faire apparaître  $f' f^{n-1}$  il n'est alors plus nécessaire de linéariser.

### 0.3.2 Un calcul de somme.

Pour  $a \in \mathbb{R}$  et  $b \in \mathbb{R}^*$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n \cos(a + kb) &= \operatorname{Re} \left( \sum_{k=0}^n e^{i(a+kb)} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left( e^{ia} \sum_{k=0}^n (e^{ib})^k \right) \\ &= \operatorname{Re} \left( e^{ia} \cdot \frac{1 - (e^{ib})^{n+1}}{1 - e^{ib}} \right) \\ &= \operatorname{Re} \left( e^{ia} \cdot \frac{2i \cdot e^{i\frac{n+1}{2}b} \left( \frac{e^{-i\frac{n+1}{2}b} - e^{i\frac{n+1}{2}b}}{2i} \right)}{2i \cdot e^{i\frac{b}{2}} \left( \frac{e^{-i\frac{b}{2}} - e^{i\frac{b}{2}}}{2i} \right)} \right) \\ \sum_{k=0}^n \cos(a + kb) &= \cos \left( a + \frac{bn}{2} \right) \cdot \frac{\sin \left( \frac{n+1}{2}b \right)}{\sin \left( \frac{b}{2} \right)}. \end{aligned}$$