Composées d'homothéties et de translation du plan. Relation vectorielle caractéristique. Groupe des homothéties-translations. Applications.

Pré-requis:
- ⋄ La structure d'espace affine du plan.
- ⋄ La notion de groupe.
- ⋄ La définition d'une application affine et de sa partie linéaire (En particulier, la connaissance du morphisme du groupe affine $GA(\mathcal{E})$ sur le groupe linéaire $GL(\mathcal{E})$).
- ⋄ Les définitions et propriétés des translations et des homothéties.
- ⋄ Le théorème de Thalès.

Cadre: On se place dans un plan affine $\mathcal{P}$ et on note $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ le plan vectoriel associé.

Notation: Dans cet exposé, nous noterons M' l'image par une application du point M, N' celle de N, ... Lorsque l'on parlera d'une application affine f, on notera $\overrightarrow{f}$ sont application vectorielle associée.

0.1 Homothéties et translations.

Théorème 0.1.1.

Les applications affines f dont la partie linéaire $\overrightarrow{f}$ est une homothétie vectorielle sont les homothéties et les translations, ces dernières étant caractérisées par $\overrightarrow{f}$ égale à l'identité.

Démonstration. Commençons par regarder le cas des translations $t_{\overrightarrow{u}}$: Soient M et N deux points de $\mathcal{P}$ et $M' := t_{\overrightarrow{u}}(M)$ et $N' := t_{\overrightarrow{u}}(N)$. Alors par définition $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'} = \overrightarrow{u}$, donc

$$\overrightarrow{t_{\overrightarrow{u}}}\left(\overrightarrow{MN}\right) = \overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{M'M} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NN'} = \overrightarrow{MN} \quad \text{(relation de Chasles)},$$

ce qui montre bien que $\overrightarrow{t_{\overrightarrow{u}}} = \mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{P}}}$. Supposons que $\overrightarrow{f} = \mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{P}}}$, soient M et N deux points de $\mathcal{P}$, d'après la relation de Chasles,

$$\overrightarrow{MN'} = \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{MN}\right) = \overrightarrow{MM'} + \overrightarrow{MN},$$

d'où $\overrightarrow{NN'} = \overrightarrow{MM'}$ ainsi f est une translation de vecteur $\overrightarrow{MM'}$.

Soit f affine telle que $\overrightarrow{f} = k\mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{P}}}$, où $k \neq 1$. Recherchons tout d'abord les éventuels points fixes de f. Soit O dans $\mathcal{P}$ fixé,

$$\overrightarrow{OM'} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{f}\,(OM) = \overrightarrow{OO'} + k\overrightarrow{OM}.$$

Ainsi, M est un point fixe de f si, et seulement si $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + k\overrightarrow{OM}$ c'est-à-dire

$$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{1-k}\overrightarrow{OO'};$$

il y a donc un unique point fixe et, si on le note I, on a pour tout point M:

$$\overrightarrow{IM'} = \overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{IM}\right) = k\overrightarrow{IM}.$$

Par suite, f est l'homothétie $H_{I,k}$. ■

Remarque: Il est courant d'appeler dilatation affine toute homothétie ou translation.

Théorème 0.1.2.

Les homothéties et translations de $\mathcal{P}$ forment un groupe $D(\mathcal{P})$ pour la loi de composition.

Démonstration. Nous allons vérifier que les homothéties vectorielles $k\mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{P}}}$ est le centre du groupe linéaire de $\mathcal{P}$, c'est-à-dire l'ensemble des éléments qui commutent avec tous les autres. Soit $\overrightarrow{f}$ dans le centre de $GL(\overrightarrow{\mathcal{P}})$, pour tout vecteur $\overrightarrow{x} \neq 0$, il existe $\overrightarrow{g} \in GL\left(\overrightarrow{\mathcal{P}}\right)$ dont l'ensemble des vecteurs fixes est $\mathbb{R}\overrightarrow{x}$; or $\overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f}\,(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{g}\,(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{f}\,(\overrightarrow{x})$, donc $\overrightarrow{f}\,(\overrightarrow{x})$ est un vecteur fixe de $\overrightarrow{g}$ et $\overrightarrow{f} = k\mathrm{Id}_{\overrightarrow{\mathcal{P}}}$ avec $k \in \mathbb{R}$. Le centre d'un groupe étant un groupe, l'ensemble des homothéties vectorielles est un groupe. Or les éléments de $D(\mathcal{P})$ sont caractérisés par le fait que leur partie linéaire est une homothétie vectorielle, par conséquent, $D(\mathcal{P})$ est un groupe. ■

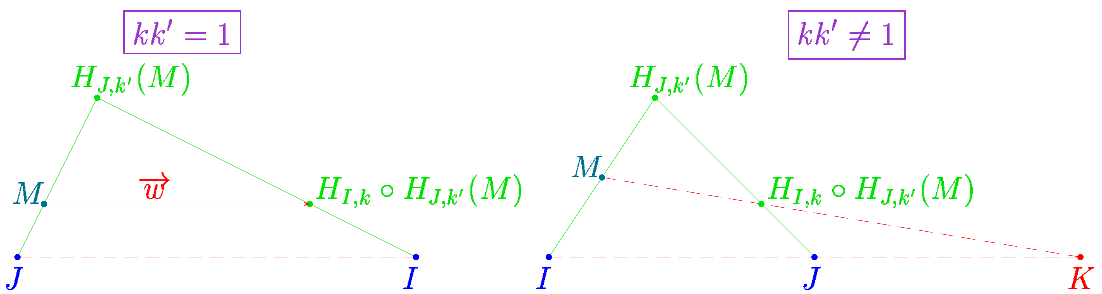
Conséquence: On peut voir $D(\mathcal{E})$ comme l'image réciproque du centre de $GL\left(\overrightarrow{\mathcal{P}}\right)$ par le morphisme $\varphi : GA(\mathcal{P}) \to GL\left(\overrightarrow{\mathcal{P}}\right)$.

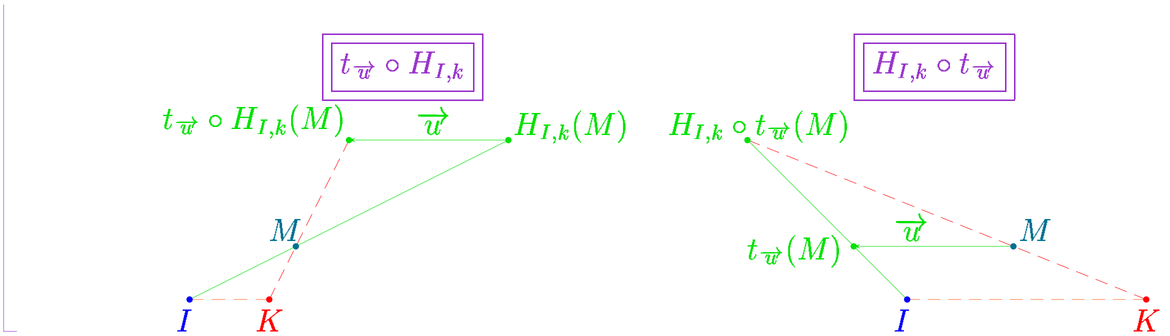
0.2 Etude des produits d'homothéties et de translations.

Propriétés 0.2.1.

$\circ$	$H_{J,k'}$	$t_{\overrightarrow{v}}$
$H_{I,k}$	$kk'=1$, $t_{\alpha\overrightarrow{IJ}}$ $kk'\neq 1$, $H_{K,kk'}$	$H_{K,k}$
$t_{\overrightarrow{u}}$	$H_{K,k'}$	$t_{\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}}$

$\boxed{H_{I,k} \circ H_{J,k'}\ :}$





Démonstration. Montrons tout d'abord la fonctorialité de deux applications affines f et g, c'est-à-dire: $\overrightarrow{f \circ g} = \overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{g}$. Soit $(M, N) \in \mathcal{E}^2$. Si $g(M) = M'$, $f(M') = M''$, $g(N) = N'$ et $f(N') = N''$. Comme f et g sont affines, $\overrightarrow{g}\left(\overrightarrow{MN}\right) = \overrightarrow{M'N'}$ et $\overrightarrow{f}\left(\overrightarrow{M'N'}\right) = \overrightarrow{M''N''}$ donc

$$\overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{g}\left(\overrightarrow{MN}\right) = \overrightarrow{M''N''} = \overrightarrow{f \circ g(M) f \circ g(N)},$$

et par définition, $\overrightarrow{f \circ g} = \overrightarrow{f} \circ \overrightarrow{g}$.

- Le produit de deux homothéties $H_{I,k}$ et $H_{J,k'}$:
  Par fonctorialité, l'application vectorielle associée à $H_{I,k} \circ H_{J,k'}$ est l'homothétie vectorielle de rapport kk'.
  - ◇ si $kk' = 1$, le produit est une translation de vecteur $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{JJ'}$, où $J' := H_{I,k} \circ H_{J,k'}(J)$. Or, $H_{J,k'}(J) = J$ et $H_{I,k}(J) = J'$ tel que $\overrightarrow{IJ'} = k\overrightarrow{IJ}$. Par conséquent, $\overrightarrow{JJ'} = \overrightarrow{JI} + \overrightarrow{IJ'} = (k-1)\overrightarrow{IJ}$.
  - ◇ Si $kk' \neq 1$, le produit est une homothétie de centre K.
    Explicitons K: Posons $K' := H_{J,k'}(K)$, on a $\overrightarrow{JK'} = k'\overrightarrow{JK}$ et $H_{I,k}(K') = K$ (car K est le centre de l'homthétie $H_{I,k} \circ H_{J,k'}$), donc $\overrightarrow{IK} = k\overrightarrow{IK'}$. Par suite,

    $$\overrightarrow{IK} = k\left(\overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{JK'}\right) = k\overrightarrow{IJ} + kk'\overrightarrow{JK} = k\overrightarrow{IJ} + kk'\left(\overrightarrow{JI} + \overrightarrow{IK}\right).$$

    Donc

    $$\overrightarrow{IK} = \frac{k(1-k')}{1-kk'}\overrightarrow{IJ},$$

    ainsi I, J et K sont alignés.
- Toujours par fonctorialité, $t_{\overrightarrow{u}} \circ H_{J,k'}$ son application linéaire associée est $k'\mathrm{Id}_{\mathcal{E}}$ ($k' \neq 1$); c'est donc une homothétie de centre K.
  Remarque: Si on pose $K' := H_{J,k'}(K)$, alors $\overrightarrow{JK'} = k'\overrightarrow{JK}$ et $K = t_{\overrightarrow{u}}(K')$, ainsi $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{K'K} = \overrightarrow{K'J} + \overrightarrow{JK} = (1-k')\overrightarrow{JK}$. Donc $\overrightarrow{u}$ est un vecteur directeur de (JK).
- La même démonstration que précédemment montre que $H_{I,k} \circ t_{\overrightarrow{v}}$ est une homothétie de centre K tel que $\overrightarrow{v} = \frac{1-k}{k}\overrightarrow{IK}$.

■

Remarques:

◇ Le produit de deux homothéties de même centre commutent.

◇ Le produit h de trois homothéties de centre A, B, C est une homothétie ou une translation. Si h est une homothétie, son centre appartient au plan (ABC) et si c'est une translation son vecteur est parallèle au plan (ABC) ou à la droite contenant A, B, C losque ces points sont alignés.

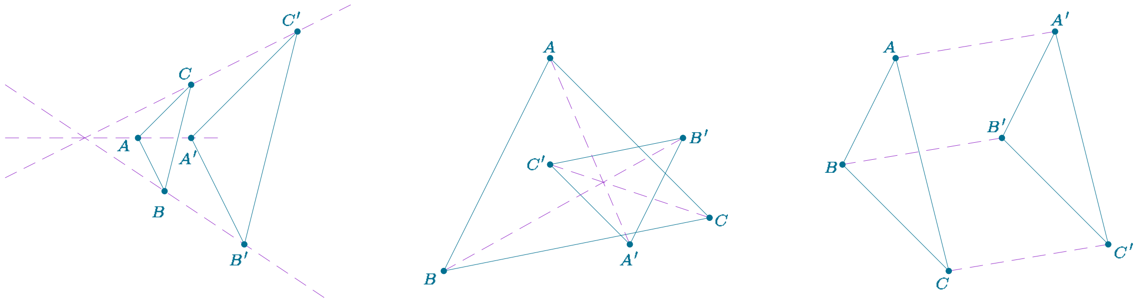
◇ Les symétries centrales et translations forment un sous-groupe de $\mathcal{G}$.

0.3 Applications.

0.3.1 Le théorème de Desargues.

Théorème 0.3.1.
Théorème de Desargues.
Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles non plats d'un espace affine avec A, A' distincts ainsi que B, B' et C, C'.

Alors les triangles ABC et $A'B'C'$ sont homothétiques ou translatés l'un de l'autre si, et seulement si les côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$ sont respectivement parallèles aux côtés $[A'B']$, $[B'C']$, $[C'A']$.



Démonstration. $\boxed{\Rightarrow}$ Les homothéties et translations conservant le parallélisme, le résultat est évident.

$\boxed{\Leftarrow}$ On suppose les côtés correspondant parallèles.
Si (AA'), (BB'), (CC') ne sont pas parallèles, alors (AA') et (BB') se coupent en I et d'après le théorème de Thalès, on a:

$$\frac{\overline{IA'}}{\overline{IA}} = \frac{\overline{IB'}}{\overline{IB}} = k.$$

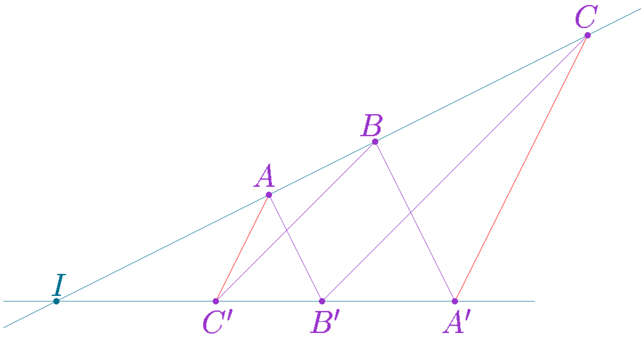
L'homothétie de centre I de rapport k transforme A en A', B en B', la droite (AC) en une droite parallèle passant par A' et qui est donc $(A'C')$. De même (BC) est transformée en $(B'C')$ et le point C qui est à l'intersection de (AC) et (BC) est tranformé en l'intersection C' de $(A'C')$ et $(B'C')$; les triangles sont donc homothétiques.
Si (AA'), (BB'), (CC') sont parallèles, alors $ABB'A'$, $ACC'A'$ et $BCC'B'$ sont des parallèlogrammes, ainsi $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{AA'}$ et $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{BB'}$. Donc les triangles sont bien translatés l'un de l'autres.

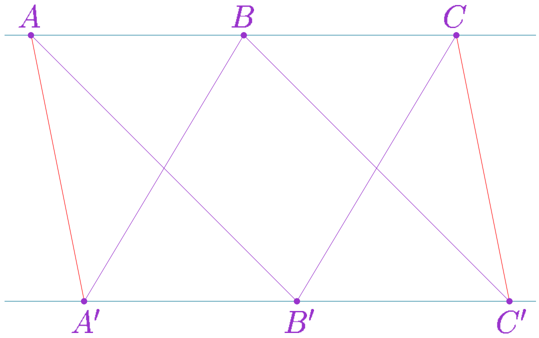
∎

0.3.2 Le théorème de Pappus.

Théorème 0.3.2.
Théorème de Pappus.
Soient Δ et Δ' deux droites distinctes du plan affine, A, B, C trois points distincts sur Δ et A', B', C' trois points distincts sur Δ' (tous distincts du point d'intersection eventuel de Δ et Δ').

Si (AB') est parallèle à (BA') et (BC') est parallèle à (CB'), alors (CA') est parallèle à (AC').





Démonstration. Si Δ et Δ' sont sécantes en I, alors d'après le théorème de Thalès, on a:

$$\frac{\overline{IA'}}{\overline{IB'}} = \frac{\overline{IB}}{\overline{IA}} = k \quad \text{et} \quad \frac{\overline{IB'}}{\overline{IC'}} = \frac{\overline{IC}}{\overline{IB}} = k'.$$

On a: $H_{I,k}(A) = B$, $H_{I,k}(B') = A'$, $H_{I,k'}(B) = C$ et $H_{I,k'}(C') = B'$. Ainsi $H_{I,k} \circ H_{I,k'}(C') = A'$ et $H_{I,k'} \circ H_{I,k}(A) = C$. Or deux homothéties de même centre commutent et leur produit est une homothétie donc (AC') et $(A'C)$ sont parallèles. Lorsque Δ et Δ' sont parallèles, on fait le même raisonnement avec des translations. ∎

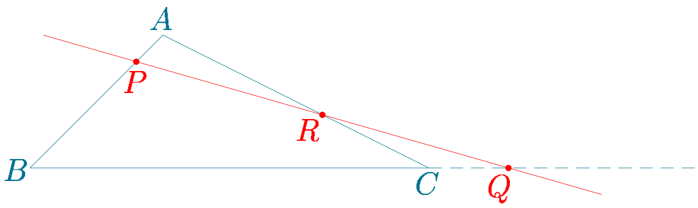
Remarque: En fait, ce théorème est une conséquence du fait que deux homothéties de même centre ou deux translations commutent.

0.3.3 Le théorème de Menelaüs.

Théorème 0.3.3.
Théorème de Menelaüs dans le plan.
Soit un triangle non plat ABC et trois points P, Q, R, différents des sommets, respectivement sur les droites (AB), (BC), (AC).

Les points P, Q, R sont alignés si, et seulement si:

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} \cdot \frac{\overline{QB}}{\overline{QC}} \cdot \frac{\overline{RC}}{\overline{RA}} = 1.$$



Démonstration. Si P, Q, R sont alignés sur une droite Δ, on considère les trois homothéties $H_{P,\alpha}$, $H_{Q,\beta}$, $H_{R,\gamma}$ avec $\alpha = \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$, $\beta = \frac{\overline{QB}}{\overline{QC}}$ et $\gamma = \frac{\overline{RC}}{\overline{RA}}$. La composée $f = H_{P,\alpha} \circ H_{Q,\beta} \circ H_{R,\gamma}$ est une homothétie ou une translation, qui conserve A. Si ce n'est pas une translation , c'est une homothétie de centre A, différente de l'identité et telle que P, Q, R et A soient alignés, ce qui est impossible puisque $A \notin \Delta$. Donc f est une translation fixant A, c'est donc l'identité. Le produit des rapports est donc 1.

Si le produit des rapports est égal à 1, f est alors une translation qui fixe A; c'est donc l'identité. Par conséquent, $(H_{R,\gamma})^{-1} = H_{P,\alpha} \circ H_{Q,\beta}$ est on sait alors que P, Q, R sont alignés. ■

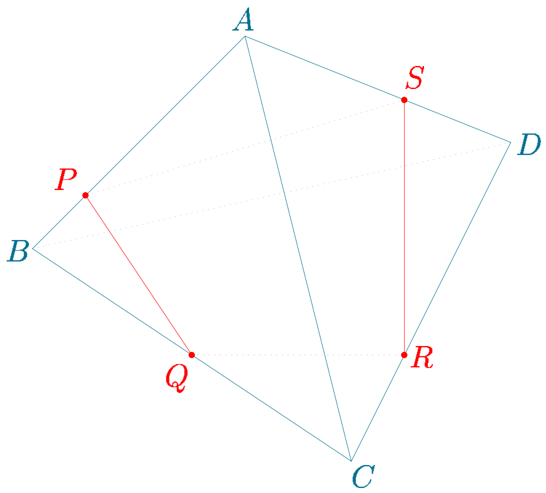
Théorème 0.3.4.

Théorème de Menelaüs dans l'espace.

Soit $ABCD$ un quadrilatère gauche de l'espace (c'est-à-dire A, B, C, D non coplanaires) et des points P, Q, R, S respectivement sur les droites (AB), (BC), (CD), (DA), en dehors des sommets.

Ces points sont coplanaires si, et seulement si

$$\frac{\overline{PA}}{\overline{PB}} \cdot \frac{\overline{QB}}{\overline{QC}} \cdot \frac{\overline{RC}}{\overline{RD}} \cdot \frac{\overline{SD}}{\overline{SA}} = 1.$$



Démonstration. Si P, Q, R, S sont dans un même plan Π, on considère les quatres homothéties $H_{P,\alpha}$, $H_{Q,\beta}$, $H_{R,\gamma}$, $H_{S,\delta}$ avec $\alpha = \frac{\overline{PA}}{\overline{PB}}$, $\beta = \frac{\overline{QB}}{\overline{QC}}$, $\gamma = \frac{\overline{RC}}{\overline{RD}}$ et $\delta = \frac{\overline{SD}}{\overline{SA}}$. Alors $f = H_{P,\alpha} \circ H_{Q,\beta} \circ H_{R,\gamma} \circ H_{S,\delta}$ est une homothétie ou une translation, qui fixe A. Si f est une homothétie de centre A différente de l'identité, elle conserve globalement Π car ce dernier contient les quatre centres: c'est impossible car A n'est pas dans Π, sinon $ABCD$ serait plan. Donc f est une translation et, comme A est fixe, c'est l'identité: le produit des rapports vaut 1.

Si ce produit vaut 1, f est une translation qui conserve A, c'est donc l'identité. Ainsi, $(H_{S,\delta})^{-1} = H_{P,\alpha} \circ H_{Q,\beta} \circ H_{R,\gamma}$, or le centre de l'homothétie produit est dans le plan des centres des trois autres homothéties, les quatres points sont coplanaires. ■

Remarque: Ce théorème se généralise dans un espace affine de dimension quelconque:

Soit $(A_0, A_1, \ldots, A_n)$ un repère affine et pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $B_i \in (A_i A_{i+1})$ avec $A_{n+1} = A_0$ et B_i distinct de A_i et A_{i+1}. Alors

$$\prod_{i=0}^{n} \frac{\overline{A_i B_i}}{\overline{A_{i+1} B_{i+1}}} = 1 \text{ si, et seulement si les } B_i \text{ sont dans un même hyperplan.}$$