

# Etude de l'application

$M \mapsto \sum_{j=1}^n a_j \overrightarrow{MA_j}$ . Définition et propriétés du barycentre de  $n$  points pondérés. Associativité; application à la détermination de barycentre attachés à des configurations usuelles du plan, de l'espace.

## Pré-requis:

- ◇ La connaissance de la structure d'espace affine (Calcul de vecteurs, la relation de Chasles).
- ◇ La connaissance des droites remarquables du triangle et du tétraèdre.

**Cadre:** On se place dans un espace affine  $\mathcal{E}$  et on notera  $\overrightarrow{\mathcal{E}}$  son espace vectoriel associé.

**Notation:** On notera  $\mathbb{K}$  un corps quelconque.

## 0.1 Etude de la fonction de Leibniz.

### Définition 0.1.1.

Un point pondéré de  $\mathcal{E}$  est un couple  $(A_i, \lambda_i)$  de  $\mathcal{E} \times \mathbb{K}$ .  
Un système de  $n$  points pondérés est une famille  $((A_i, \lambda_i))_{i=1}^n$  de points pondérés.

**Notation:** Avec les notations de la définition, le poids total  $\lambda$  du système est  $\lambda := \sum_{i=1}^n \lambda_i$ .

### Définition 0.1.2.

La fonction vectorielle de Leibniz associée au système  $((A_i, \lambda_i))_{i=1}^n$  est l'application

$$\begin{aligned} \overrightarrow{f} : \mathcal{E} &\longrightarrow \overrightarrow{\mathcal{E}} \\ M &\longmapsto \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{MA_i}. \end{aligned}$$

### Propriété 0.1.3.

La fonction vectorielle de Leibniz  $M \mapsto \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{MA_i}$  est constante si, et seulement si  $\lambda = 0$ . Dans le cas contraire, c'est une bijection de  $\mathcal{E}$  dans  $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ .

*Démonstration.* Soient  $O$  et  $M$  deux points de  $\mathcal{E}$ . La relation de Chasles entraîne:

$$\vec{f}(M) - \vec{f}(O) = \lambda \overrightarrow{MO};$$

La fonction  $\vec{f}$  est donc constante si, et seulement si  $\lambda = 0$ .

Sinon, pour tout  $\vec{u} \in \vec{\mathcal{E}}$ , l'équation  $\vec{f}(M) = \vec{f}(O) + \lambda \overrightarrow{MO} = \vec{u}$  a une unique solution en  $M$  donnée par

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\vec{f}(O) - \vec{u}}{\lambda}$$

et c'est donc une bijection de  $\mathcal{E}$  dans  $\vec{\mathcal{E}}$ . ■

## 0.2 Définition et propriétés du barycentre.

### Définition 0.2.1.

Lorsque  $\lambda \neq 0$ , le barycentre du système  $((A_i, \lambda_i))_{i=1}^n$  est l'unique point  $G \in \mathcal{E}$  vérifiant

$$\vec{f}(G) = \vec{0}.$$

### Propriétés 0.2.2.

Soit  $G$  le barycentre de  $((A_i, \lambda_i))_{i=1}^n$ .

1. Le barycentre  $G$  reste inchangé lorsqu'on ajoute un point de coefficient nul ou lorsqu'on échange l'ordre des points pondérés.
2. Le point  $G$  est aussi le barycentre de  $((A_i, \alpha \lambda_i))_{i=1}^n$  pour tout  $\alpha \in \mathbb{R}^*$ .
3. Soient  $H$  et  $K$  les barycentres respectifs de  $((A_i, \lambda_i))_{i=1}^p$  et  $((A_i, \lambda_i))_{i=p+1}^n$  (lorsqu'ils existent). Alors  $G$  est le barycentre de  $\left( (H, \sum_{i=1}^p \lambda_i), \left( K, \sum_{i=p+1}^n \lambda_i \right) \right)$  (c'est l'associativité du barycentre).

*Démonstration.* Seule la dernière propriété n'est pas triviale.

$$\begin{aligned} \vec{f}(G) = \vec{0} &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^p \lambda_i \overrightarrow{GA_i} + \sum_{i=p+1}^n \lambda_i \overrightarrow{GA_i} = \vec{0} \\ &\Leftrightarrow \left( \sum_{i=1}^p \lambda_i \right) \overrightarrow{GH} + \left( \sum_{i=p+1}^n \lambda_i \right) \overrightarrow{GK} = \vec{0} \\ &\quad \text{(par définition de } H \text{ et } K) \end{aligned}$$

Par conséquent,  $G$  est bien le barycentre annoncé. ■

### Définition 0.2.3.

Supposons que  $\mathcal{E}$  soit un espace affine de dimension  $n$ . Un repère affine (encore appelé une base affine) de  $\mathcal{E}$  est une  $(n+1)$ -liste  $(A_0, A_1, \dots, A_n)$  de points tels que la famille  $\{ \overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n} \}$  soit une base de  $\vec{\mathcal{E}}$ .

### Théorème 0.2.4.

Si  $(A_0, A_1, \dots, A_n)$  est un repère affine de  $\mathcal{E}$ , tout point  $M$  de  $\mathcal{E}$  est barycentre des  $(n + 1)$  points de cette famille avec des coefficients uniques à une constante multiplicative près. Il y a unicité de ces coefficients si on impose que leur somme soit égale à 1.

*Démonstration.* Tout point  $M$  de  $\mathcal{E}$  s'exprime de façon unique sous la forme

$$\overrightarrow{A_0M} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \overrightarrow{A_0A_i}$$

autrement dit,  $M$  est le barycentre de

$$\left( \left( A_0, 1 - \sum_{i=1}^n \lambda_i \right), (A_1, \lambda_1), (A_2, \lambda_2), \dots, (A_n, \lambda_n) \right).$$

Si  $M$  est le barycentre de  $((A_0, \alpha_0), (A_1, \alpha_1), \dots, (A_n, \alpha_n))$  et de  $((A_0, \beta_0), (A_1, \beta_1), \dots, (A_n, \beta_n))$ , alors

$$\overrightarrow{A_0M} = \frac{\sum_{i=1}^n \alpha_i \overrightarrow{A_0A_i}}{\sum_{j=0}^n \alpha_j} = \frac{\sum_{i=1}^n \beta_i \overrightarrow{A_0A_i}}{\sum_{j=0}^n \beta_j}$$

c'est-à-dire

$$\sum_{i=1}^n \frac{\alpha_i}{\sum_{j=0}^n \alpha_j} \overrightarrow{A_0A_i} = \sum_{i=1}^n \frac{\beta_i}{\sum_{j=0}^n \beta_j} \overrightarrow{A_0A_i},$$

or  $\{\overrightarrow{A_0A_1}, \overrightarrow{A_0A_2}, \dots, \overrightarrow{A_0A_n}\}$  est une base de  $\overrightarrow{\mathcal{E}}$  donc

$$\forall i \in \mathbb{N}, \frac{\alpha_i}{\sum_{j=0}^n \alpha_j} = \frac{\beta_i}{\sum_{j=0}^n \beta_j},$$

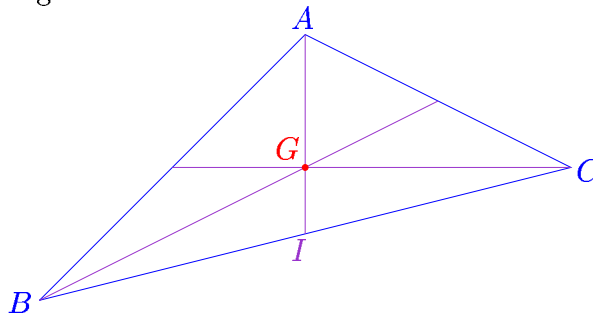
d'où le résultat. L'unicité est alors immédiate lorsque  $\sum_{i=0}^n \alpha_i = 1$ . ■

### Définition 0.2.5.

On appelle coefficients barycentriques de  $M$  dans cette base les scalaires intervenant dans l'expression de  $M$  comme barycentre des points de la base. Ces coefficients sont dits normalisés ou homogènes selon que la somme est égale ou non à un.

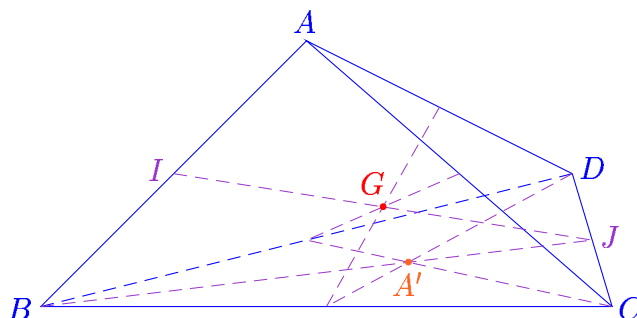
## 0.3 Applications.

- Les médianes d'un triangles  $ABC$ .



L'isobarycentre  $G$  d'un triangle  $ABC$  (encore appelé centre de gravité) est aussi le barycentre de  $(A, 1)$  et de  $(I, 2)$  où  $I$  est le milieu de  $[BC]$ . Ainsi les médianes d'un triangle sont concourantes en  $G$  qui est situé aux deux tiers de chacune à partir du sommet.

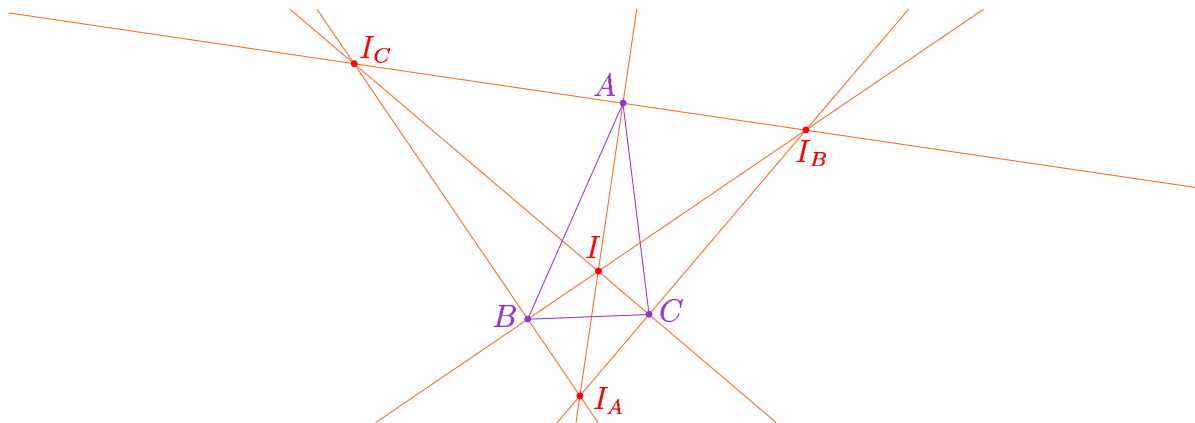
- Les médianes et les bimédianes d'un tétraèdre.



L'isobarycentre  $G$  d'un tétraèdre  $ABCD$  est aussi le barycentre de  $(A, 1)$  et de  $(A', 3)$  où  $A'$  est le centre de gravité de la face  $BCD$ . Les médianes d'un tétraèdre (segments joignant un sommet au centre de gravité de la face opposée) sont donc concourantes en  $G$  qui est situé au trois quarts de chacune à partir du sommet.

Le point  $G$  est aussi, par associativité, le barycentre de  $(I, 2)$  et  $(J, 2)$  où  $I$  et  $J$  sont les milieux respectifs de  $[AB]$  et  $[CD]$ . Les trois bimédianes (segments joignant les milieux de deux arêtes opposées) d'un tétraèdre sont donc concourantes en  $G$ , leur milieu commun.

- Les trois bissectrices intérieures de  $ABC$  sont concourantes en le barycentre  $I$  de  $(A, a)$ ,  $(B, b)$  et  $(C, c)$ . La bissectrice intérieure issue de  $A$  (respectivement de  $B$ ; respectivement de  $C$ ) est concourante avec les deux bissectrices extérieures issues de  $B$  et  $C$  (respectivement de  $C$  et  $A$ ; respectivement de  $A$  et  $B$ ) en le barycentre  $I_A$  de  $(A, -a)$ ,  $(B, b)$  et  $(C, c)$  (respectivement  $I_B$  de  $(A, a)$ ,  $(B, -b)$  et  $(C, c)$ ; respectivement  $I_c$  de  $(A, a)$ ,  $(B, b)$  et  $(C, -c)$ ).



*Démonstration.* Puisque  $I = \text{Bar}((A, a), (B, b), (C, c))$ , alors  $(a + b + c)\overrightarrow{AI} = b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}$ , ainsi  $\overrightarrow{AI}$  est colinéaire à  $b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}$  et par conséquent à

$$\frac{b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}}{bc} = \frac{\overrightarrow{AB}}{c} + \frac{\overrightarrow{AC}}{b}.$$

Ce dernier vecteur est la somme de deux vecteurs unitaires colinéaires à  $\overrightarrow{AB}$  et  $\overrightarrow{AC}$  et dirige donc la bissectrice intérieure en  $A$ . Par suite, le point  $I$  est sur cette dernière.

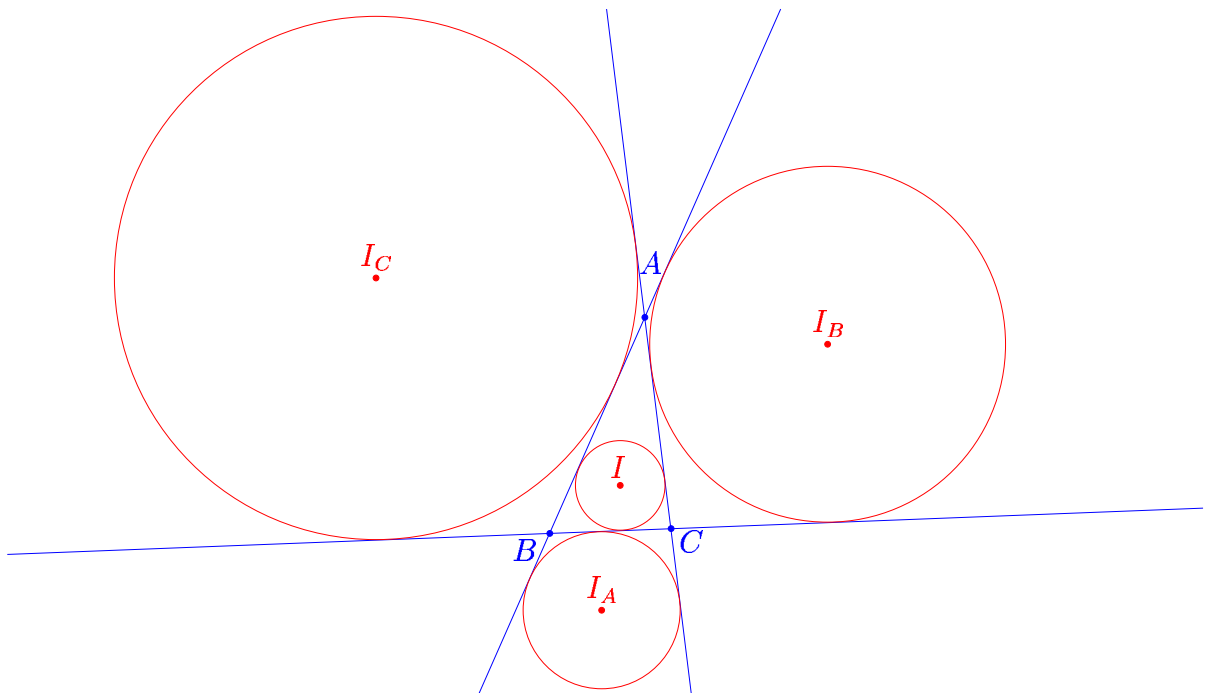
La même démonstration montrera que  $I$  est aussi sur les autres bissectrices intérieures de  $ABC$ .

$I_A = \text{Bar}((A, -a), (B, b), (C, c))$ , alors  $(-a + b + c)\overrightarrow{AI_A} = b\overrightarrow{AB} + c\overrightarrow{AC}$  et en procédant comme précédemment on montre que  $I_A$  est sur la bissectrice intérieure en  $A$ . Ce barycentre  $I_A$  vérifie également  $(-a + b + c)\overrightarrow{BI_A} = -a\overrightarrow{BA} + c\overrightarrow{BC}$ ; on en déduit que  $\overrightarrow{BI_A}$  est colinéaire à

$$\frac{-a\overrightarrow{BA} + c\overrightarrow{BC}}{ac} = \frac{\overrightarrow{BC}}{a} - \frac{\overrightarrow{BA}}{c},$$

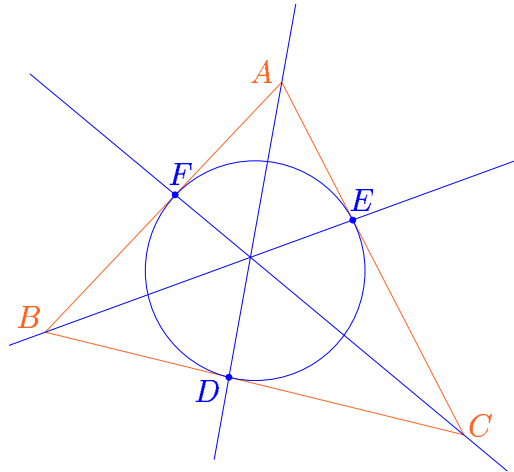
comme ce dernier est la soustraction de deux vecteurs unitaires colinéaires à  $\overrightarrow{BC}$  et  $\overrightarrow{BA}$ , il dirige la bissectrice extérieure en  $B$  et  $I_A$  se trouve donc sur celle-ci. De même la relation  $(-a + b + c)\overrightarrow{CI_A} = -a\overrightarrow{CA} + b\overrightarrow{CB}$  implique que  $I_A$  est sur la bissectrice extérieure en  $C$ , d'où la dernière propriété de l'énoncé. ■

**Remarque:**  $I, I_A, I_B$  et  $I_C$  sont les centres de trois cercles tangents aux côtés du triangle, celui de centre  $I$  est appelé le cercle inscrit au triangle  $ABC$  et les trois autres sont appelés cercles *exinscrits* au triangle.



**Exercice:** Soit  $\mathcal{C}$  le cercle inscrit au triangle  $ABC$  et  $D, E, F$  les points de contact respectifs de  $\mathcal{C}$  avec les droites  $(BC), (CA), (AB)$ . Montrez que les droites  $(AD), (BE)$  et  $(CF)$  sont concourantes en un point appelé *point de Gergonne* du triangle  $ABC$ .

## Point de Gergonne



*Démonstration.* Remarquons tout d'abord que  $AF = AE = x$ ,  $BF = BD = y$  et  $CE = CD = z$ . Posons  $G$  le barycentre de  $\{(A, x^2yz), (B, xy^2z), (C, xyz^2)\}$ . Le point  $D$  est le barycentre de  $\{(B, y), (C, z)\}$ , mais aussi de  $\{(B, xy^2z), (C, xyz^2)\}$  (en multipliant par  $xyz$ ). Donc par associativité du barycentre,  $G$  est la barycentre de  $\{(A, x^2yz), (D, xy^2z + xyz^2)\}$  et par conséquent  $G$  appartient à  $(AD)$ . On a de même  $G$  sur  $(BE)$  et  $(FC)$ . ■