Applications du produit scalaire et du produit vectoriel dans l'espace orienté: calculs de distances, d'aires, de volumes, d'angles....

Pré-requis:

- ◇ La connaissance de la structure d'espace affine (Calcul de vecteurs, la relation de Chasles).
- ◇ La définition de produit vectoriel et produit scalaire (En particulier, la notion d'orthogonalité, l'expression à l'aide du cosinus du produit scalaire dans une base orthonormée).

- ◇ Les définitions de droites et de projections orthogonales.
- ◇ La définition du sinus d'un angle orienté à l'aide du déterminant.

Cadre: On se place dans un espace affine $\mathcal{E}$ et on notera $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ son espace vectoriel associé.

0.1 Distances.

Théorème 0.1.1.

Soit $\overrightarrow{\mathcal{D}}$ une droite vectorielle de vecteur directeur $\overrightarrow{n}$. On notera $\overrightarrow{\mathcal{P}}$ l'hyperplan orthogonal à $\overrightarrow{\mathcal{D}}$, $p_{\overrightarrow{\mathcal{D}}}$ et $p_{\overrightarrow{\mathcal{P}}}$ les projections orthogonales respectivement sur $\overrightarrow{\mathcal{D}}$ et sur $\overrightarrow{\mathcal{P}}$. Pour tout vecteur $\overrightarrow{u}$ de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$,

$$p_{\overrightarrow{\mathcal{D}}}\left(\overrightarrow{u}\right) = \frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n}}{\|\overrightarrow{n}\|^2} \cdot \overrightarrow{n} \qquad \text{et} \qquad p_{\overrightarrow{\mathcal{P}}}\left(\overrightarrow{u}\right) = \overrightarrow{u} - \frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n}}{\|\overrightarrow{n}\|^2} \cdot \overrightarrow{n}.$$

Démonstration. Dans la décomposition $\overrightarrow{\mathcal{D}} \oplus \overrightarrow{\mathcal{D}}^{\perp}$ de $\mathcal{E}$ en somme orthogonale, $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}$ avec $\overrightarrow{u_1} = p_{\overrightarrow{\mathcal{D}}}\left(\overrightarrow{u}\right) = \lambda \overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{u_2} = p_{\overrightarrow{\mathcal{D}}^{\perp}}\left(\overrightarrow{u}\right) = p_{\overrightarrow{\mathcal{P}}}\left(\overrightarrow{u}\right)$. De plus, on a:

$$\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{u} = \overrightarrow{n} \cdot (\overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{u_2}) = \overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{u_1} = \lambda \cdot \|\overrightarrow{n}\|^2.$$

Ainsi $\lambda = \frac{\overrightarrow{n} \cdot \overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{n}\|^2}$ et

$$p_{\overrightarrow{\mathcal{D}}}\left(\overrightarrow{u}\right) = \frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{n}}{\|\overrightarrow{n}\|^2} \cdot \overrightarrow{n}.$$

L'égalité $\overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{u} - \overrightarrow{u_1}$ donne l'autre égalité. ∎

Remarque: Si on rapporte $\mathcal{E}$ à un repère orthonormal, la distance d'un point M de $\mathcal{E}$ de coordonnées $(m_1, m_2, \ldots, m_n)$ à l'hyperplan $\mathcal{P}$ d'équation $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n = c$ est

$$\mathrm{d}(M, \mathcal{P}) = \frac{|\alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_2 + \ldots + \alpha_n m_n - c|}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2}}.$$

Démonstration. Soit $A(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \mathcal{P}$ et $\overrightarrow{n}$ le vecteur normal à $\mathcal{P}$ de coordonnées $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Notons $\overrightarrow{\mathcal{D}}$ la droite vectorielle $\overrightarrow{\mathcal{P}}^{\perp} = \mathbb{R}\overrightarrow{n}$ et H le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$. La décomposition du vecteur $\overrightarrow{AM}$ dans la somme directe $\overrightarrow{\mathcal{P}} \oplus \overrightarrow{\mathcal{D}}$ s'écrit $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{HM}$, ainsi $\overrightarrow{HM}$ est le projeté orthogonal de $\overrightarrow{AM}$ sur $\overrightarrow{\mathcal{D}}$. Par conséquent:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}(M, \mathcal{P}) &= MH \\
&= \left\| \frac{\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n}}{\|\overrightarrow{n}\|^2} \cdot \overrightarrow{n} \right\| \quad \text{(d'après le théorème précédent)} \\
&= \frac{\left|\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{n}\right|}{\|\overrightarrow{n}\|} \\
&= \frac{|\alpha_1 (m_1 - a_1) + \alpha_2 (m_2 - a_2) + \ldots + \alpha_n (m_n - a_n)|}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \ldots + \alpha_n^2}}.
\end{aligned}$$

Or $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_n a_n - c = 0$, d'où le résultat. ■

Exercice: Dans le plan, chercher des équations cartésiennes des bissectrices des droites d'équations $y = 2x+5$ et $7x-3y = 1$. Même question dans l'espace pour les plans bissecteurs des plans d'équations $4x + 9y - 2z - 5 = 0$ et $x + 5z - 2 = 0$.

Théorème 0.1.2.

Soit A et B deux points distincts. Une équation de la sphère de diamètre $[AB]$ est $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$.

Démonstration. Soit I le milieu du segment $[AB]$,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 &\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IB}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}\right) \cdot \left(\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}\right) = 0 \\
&\Leftrightarrow MI^2 - IA^2 = 0 \\
\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 &\Leftrightarrow MI = IA.
\end{aligned}$$

■

Théorème 0.1.3.

Soir $\mathcal{D}$ une droite de $\mathcal{E}$ passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$. La distance d'un point M à $\mathcal{D}$ est:

$$\mathrm{d}(M, \mathcal{D}) = \frac{\left\|\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{u}\right\|}{\|\overrightarrow{u}\|}.$$

Démonstration. On a $\mathrm{d}(M, \mathcal{D}) = MH$ où H est le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$, puis

$$\left\|\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{u}\right\| = \left\|\left(\overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HA}\right) \wedge \overrightarrow{u}\right\| = \left\|\overrightarrow{MH} \wedge \overrightarrow{u}\right\| = MH \cdot \|\overrightarrow{u}\|.$$

■

Exercice: Soient A et B deux points de E et r un réel strictement poitif. Quel est l'ensemble des points M de E vérifiant

$$\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} = r?$$

Démonstration. Regardons la distance de M à (AB):

$$\mathrm{d}(M,(AB)) = \frac{\left\|\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{AB}\right\|}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|} = \frac{\left\|\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}\right\|}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|},$$

donc l'ensemble recherché est un cylindre de révolution d'axe de révolution (AB) et de rayon $\frac{r}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}$. ■

Théorème 0.1.4.
Soit $\mathcal{P} = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$ un plan de $\mathcal{E}$ passant par A. La distance d'un point M à $\mathcal{P}$ est

$$\mathrm{d}(M,\mathcal{P}) = \frac{\left|\overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})\right|}{\|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\|}.$$

Démonstration. Soit H le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{P}$, alors $\mathrm{d}(M,\mathcal{P}) = MH$. De plus, le vecteur $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ est normal à $\mathcal{P}$. Donc

$$\left|\overrightarrow{MA} \cdot (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})\right| = \left|\overrightarrow{MH} \cdot (\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v})\right| = MH \cdot \|\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}\|,$$

d'où le résultat. ■

0.2 Angles, aires et volumes.

Dans cette partie, on supposera que $\mathcal{E}$ est orienté.

Donnons tout d'abord l'expression du sinus d'un angle orienté à l'aide du produit vectoriel:

Théorème 0.2.1.
Soient A, B, C trois points de $\mathcal{E}$,

- Si A, B, C sont alignés, alors $\sin\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = 0$.
- Sinon, on note $\mathcal{P}_{ABC}$ le plan passant par A, B, C et on le muni d'un repère orthonormal direct $(O, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$, alors

$$\sin\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{AC}\right\|} \cdot \overrightarrow{k},$$

où $\overrightarrow{k}$ est le vecteur unitaire directement orthogonal à $\mathcal{P}_{ABC}$ et où $\sin\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ désigne le sinus de l'angle $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$ orienté par $(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath})$.

Démonstration. Soit $e = \left(\overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}, \overrightarrow{k}\right)$ la base de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ proposée dans le théorème. Alors

$$\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{\imath} + y\overrightarrow{\jmath}, \quad \overrightarrow{v} = x'\overrightarrow{\imath} + y'\overrightarrow{\jmath} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{w} = \alpha\overrightarrow{\imath} + \beta\overrightarrow{\jmath} + \gamma\overrightarrow{k}.$$

On peut écrire,

$$(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{w} = \det_e(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w}) = \begin{vmatrix} x & x' & \alpha \\ y & y' & \beta \\ 0 & 0 & \gamma \end{vmatrix}.$$

En développant le déterminant par rapport à la dernière ligne, on obtient

$$(\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{w} = \det_{(\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath})}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})\,\gamma.$$

Or $\gamma = \overrightarrow{k} \cdot \overrightarrow{w}$ et l'égalité est vraie pour tout réel α, β et γ, ainsi

$$\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \det_{(\overrightarrow{\imath},\overrightarrow{\jmath})}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})\,\overrightarrow{k} = \|\overrightarrow{u}\| \cdot \|\overrightarrow{v}\| \sin(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})\,\overrightarrow{k}.$$

■

Voici une application directe de cette formule:

Théorème 0.2.2.
Soit ABC un triangle de $\mathcal{E}$, l'aire de ABC est

$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|.$$

Démonstration. Soit H le pied de la hauteur issue de A. Alors,

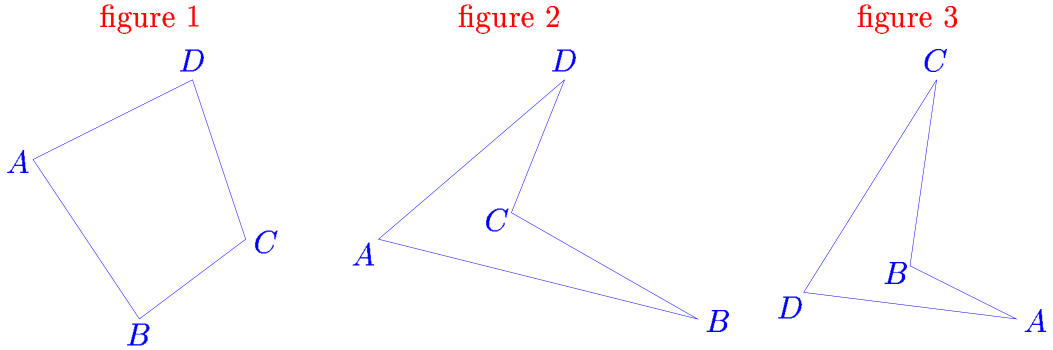
$$\mathcal{A}_{ABC} = \frac{1}{2}BC \cdot AH = \frac{1}{2}BC \cdot AB\left|\sin\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right)\right| = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right\|.$$

■

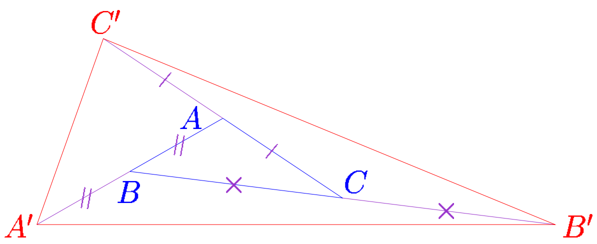
Exercices:

1. Soit $ABCD$ un quadrilatère plat non croisé de $\mathcal{E}$. L'aire de $ABCD$ est

$$\mathcal{A}_{ABCD} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BD}\right\|.$$



2. On construit les symétriques A', B', C' respectifs des points A, B, C par rapport aux points B, C, A. Quel rapport y a-t-il entre les aires des triangles $A'B'C'$ et ABC?



3. Montrer que le centre de gravité G d'un triangle ABC divise l'aire du triangle en trois aires égales.

Démonstration. 1. Supposons $ABCD$ direct. On a

$$\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{BD}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BD}\right\|.$$

Si $ABCD$ est convexe (figure 1), les bases $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BD}\right)$ et $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right)$ sont directes et les vecteurs $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BD}$ sont colinéaires et de même sens. Ainsi,

$$\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{BD}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{BD}\right\| + \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BD}\right\| = \mathcal{A}_{ABD}+\mathcal{A}_{BCD} = \mathcal{A}_{ABCD}.$$

Si $ABCD$ est non convexe, plaçons nous dans le cas de figure 2 (la figure 3 se traite de la même façon). Les bases $\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{BD}\right)$ et $\left(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD}\right)$ sont de sens contraires. Ainsi les vecteurs $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BD}$ sont colinéaires et de sens contraires et on obtient:

$$\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{BD}\right\| = \frac{1}{2}\left|\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{BD}\right\| - \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{BC}\wedge\overrightarrow{BD}\right\|\right| = \left|\mathcal{A}_{ABD}-\mathcal{A}_{BCD}\right| = \mathcal{A}_{ABCD}.$$

2.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{A'B'}\wedge\overrightarrow{A'C'} &= \left(\overrightarrow{A'B}+\overrightarrow{BB'}\right)\wedge\left(\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{AC'}\right)\\
&= \left(\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{BC}\right)\wedge\left(2\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}\right)\\
&= \left(3\overrightarrow{BA}+2\overrightarrow{AC}\right)\wedge\left(2\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CA}\right)\\
&= 6\underbrace{\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{BA}}_{=\vec{0}}+3\overrightarrow{BA}\wedge\overrightarrow{CA}+4\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{BA}+2\underbrace{\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{CA}}_{\vec{0}}\\
\overrightarrow{A'B'}\wedge\overrightarrow{A'C'} &= 7\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}
\end{aligned}$$

d'où

$$\mathcal{A}_{A'B'C'} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{A'B'}\wedge\overrightarrow{A'C'}\right\| = \frac{7}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\| = 7\mathcal{A}_{ABC}.$$

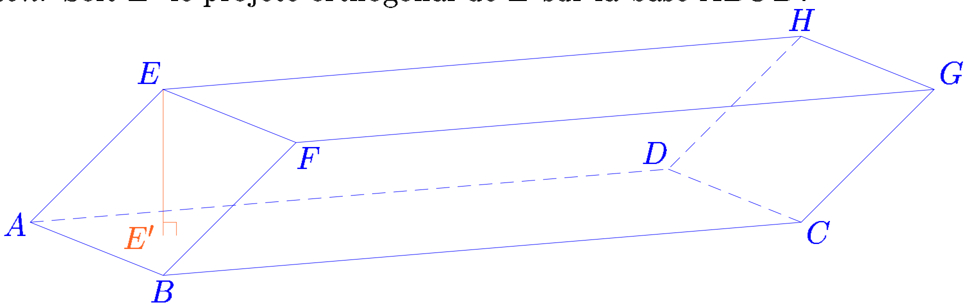
3. Le centre de gravité G vérifie $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$. Ainsi, $\overrightarrow{GA}\wedge\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\wedge\overrightarrow{GB}=\vec{0}$ c'est-à-dire $\mathcal{A}_{GAB}=\mathcal{A}_{GBC}$. De la même façon on a $\mathcal{A}_{GBC}=\mathcal{A}_{GCA}$.

■

Théorème 0.2.3.
Soient A, B, D, E quatres points affinement indépendants de l'espace de dimension 3. Le volume du parallélépipède construit sur les arêtes $[AB]$, $[AE]$, $[AD]$ est

$$\mathcal{V}_{ABDE} = \left|\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\right)\cdot\overrightarrow{AE}\right|.$$

Démonstration. Soit E' le projeté orthogonal de E sur la base $ABCD$.



Le volume du parallélépipède sera $\mathcal{V} = \mathcal{A}_{ABCD} \times EE'$. Or d'après les théorèmes précédent,

$$\mathcal{A}_{ABCD} = \left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\right\| \quad \text{et} \quad EE' = \mathrm{d}\left(E, \mathcal{P}_{ABC}\right) = \frac{\overrightarrow{AE} \cdot \left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\right)}{\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\right\|}.$$

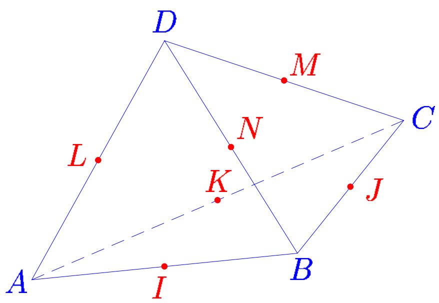
Donc

$$\mathcal{V}_{ABDE} = \left|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AE} \cdot \frac{\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}}{\left\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\right\|}\right| = \left|\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\right) \cdot \overrightarrow{AE}\right|.$$

■

Remarque: Remarque, dans la figure ci-dessus, le volume de la pyramide $ABCDE$ sera $\frac{1}{3}\left|\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\right) \cdot \overrightarrow{AE}\right|$, et celui du tétraèdre $ABCE$ sera $\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}\right) \cdot \overrightarrow{AE}\right|$.

Exercice: Soit $ABCD$ un tétraèdre et I, J, K, L, M les milieux des arêtes indiqués sur la figure ci-dessous;



Montrez que

$$\mathcal{V}_{ABCD} = \frac{4}{3}\left|\left(\overrightarrow{LN} \wedge \overrightarrow{LM}\right) \cdot \overrightarrow{KM}\right|.$$